Решения.

Задача 11.1. *(15 баллов)* Можно ли число 2024 представить в виде $a^5 + b^3$, где a и b — натуральные числа?

Решение.

Да, можно. Заметим, что $2024 = 1024 + 1000 = 4^5 + 10^3$.

Критерии.

0 баллов: только верный ответ.

8 баллов: сформулировано, и, возможно, доказано, что если $a^5 + b^3 = 2024$, то $a < 5$, или аналогичное. Далее верный результат не получен (например, далее ничего нет, или разобраны не все случаи, или результат неверен из-за арифметической ошибки).

Задача 11.2. *(15 баллов)* В некотором числе 10 единиц, 100 двоек, 1000 троек, …, 10^9 девяток, расположенных в некотором порядке. Каждую секунду в нём стирают последнюю цифру. Правда ли, что в какой-то момент после начального получится число, делящееся на 9?

Решение.

Да, правда.

Остаток от деления числа на 9 равен остатку суммы цифр числа при делении на 9. Мысленно выкинем из числа все девятки, так как они не меняют остаток суммы цифр при делении на 9. В нашем числе есть 10^8 восьмёрок, а остальных цифр $10 + 100 + \ldots = 11\,111\,110$. Разобьём наши $111\,111\,110$ цифр на $11\,111\,111$ блоков по десять цифр. Если в каждом блоке не более 9 восьмёрок, то всего их не более чем $9 \cdot 11\,111\,111 < 10^8$, значит, найдётся блок из 10 подряд идущих восьмёрок. Пусть после стирания первой из них (если идти справа налево) сумма оставшихся цифр равна x. Тогда при последовательном стирании следующих восьми восьмёрок суммы оставшихся цифр равны $x - 8$, $x - 16$, $\ldots x - 64$. Эти девять чисел дают попарно различные остатки при делении на девять (разность любых двух различных из них не кратна 9, ибо числа 8, 16,…, 64 не кратны 9), потому среди них найдётся кратное девяти.

Критерии.

Под восьмёрками «подряд» ниже подразумеваются такие восьмёрки, между которыми нет цифр отличных от девяток (и от самих этих восьмёрок).

Если в работе «доказательство» того, что в числе найдутся девять восьмёрок «подряд» состоит лишь из ссылки на то, что восьмёрок больше 8/9 от 111111110 — всех отличных от девяток цифр, то работа оценивается так же, как если бы в ней вообще не было попытки доказательства приведённого утверждения. Аналогично с утверждением про восемь восьмёрок «подряд».

0 баллов: только верный ответ и/или формулировка признака делимости на 9 и/или наблюдение, что девятки «можно выкинуть» и/или аналогичное.

4 балла: есть рассуждение вида «когда вычёркиваются по одной подряд ищущие восьмёрки, то остаток остающегося от деления на 9 каждый раз меняется на 1, поэтому если много подряд вычеркнуть, то где-то будет кратное 9», а далее утверждается, что «восьмёрок много, а поэтому где-то будет много подряд», при этом строгий смысл слова «много» никак не прояснён. Сюда же относится случай, когда вместо слова «много» написано конкретное число, большее 10. Других продвижений нет.

4 балла: сформулировано, что найдутся 8 восьмёрок «подряд». Далее нужное утверждение выведено в предположении (возможно неявном), что самая левая из них не первая цифра в числе, а самая правая не последняя цифра в числе. Других продвижений нет.

6 баллов: сформулировано, что найдутся 9 восьмёрок «подряд». Далее нужное утверждение выведено в предположении (возможно неявном), что самая левая из них не первая цифра в числе. Других продвижений нет.

8 баллов: задача полностью сведена к доказательству того, что найдутся 10 восьмёрок «подряд», или того, что найдутся 9 подряд, или того, что найдутся 8 подряд среди цифр со второй по предпоследнюю. Других продвижений нет.

11 баллов: доказано, что найдутся восемь восьмёрок «подряд»; доказательство легко адаптируется к доказательству того, что они найдутся и среди цифр со второй по предпоследнюю; далее нужное утверждение выведено в предположении (возможно, неявном), что самая левая из них не первая цифра в числе и самая правая не последняя цифра в числе; а эти случаи не разобраны или разобраны неверно.

13 баллов: доказано, что найдутся девять восьмёрок «подряд», далее нужное утверждение выведено в предположении (возможно, неявном), что самая левая из них не первая цифра в числе; случай, когда она первая, не разобран или разобран неверно.

Задача 11.3. *(15 баллов)* В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, в котором $AB = BC = CD$, диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Описанная окружность треугольника ADE пересекает сторону AB в точке $P \neq A$ и продолжение стороны CD в точке $Q \neq D$. Докажите, что отрезки AP и DQ равны.

Решение.

Пусть окружность из условия пересекает отрезок AB в точке P, а продолжение отрезка CD — в точке Q. Заметим, Q лежит именно на продолжении CD за точку D, ибо в противном случае точка E лежала бы строго внутри треугольника QAD, и не лежала бы на его описанной окружности, что противоречит условию. Кроме того, $P \neq B$, так как иначе прямая BD имела бы с окружностью из условия три попарно различные общие точки E, D, B.

Так как хорды на которые опираются равные вписанные углы равны, то достаточно доказать, что $\angle PEA = \angle DEQ$ — это и сделаем. Из теоремы о внешнем угле треугольника получаем $\angle AEP = \angle BPE - \angle BAE$ и $\angle DEQ = \angle CDE - \angle DQE$, потому нам достаточно проверить равенство $\angle BPE + \angle DQE = \angle CDE + \angle BAE$. Покажем, что каждая из этих сумм равна $\angle BEA$. Действительно, пользуясь снова теоремой о внешнем угле треугольника, равнобедренностью треугольников ABC и BCD, а также тем, что A, P, E, D, Q последовательные точки на окружости имеем равенства $\angle BPE + \angle DQE = \angle EDA + \angle EAD = \angle BEA$ и $\angle CDE + \angle BAE = \angle CBE + \angle BCE = \angle BEA$.

Критерии.

Оценка не снижается за отсутствие доказательства того, что Q лежит на луче CD, и того, что $P \neq B$. Оценка не повышается за непосредственно доказательсво этого.

0 баллов: задача только сведена к доказательству одного из утверждений: $\angle PEA = \angle DEQ$; $\angle(AB, PD) = \angle(PD, CD)$; $PD \| AQ$; или аналогичные переформулировки.

13 баллов: задача решена только в предположении (возможно неявном), что AB не параллельна CD, или что лучи AB и DC пересекаются, или что лучи BA и CD пересекаются. Но решение напрямую переписывается в ориентированных углах и становится полностью верным.

Задача 11.4. *(15 баллов)* Есть $4n$ отрезков длины $x_1, x_2, \ldots, x_{4n}$, где $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, а при $k > 2$ выполнено $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$. Сколькими способами эти отрезки можно разбить на четвёрки так, чтобы из отрезков каждой четвёрки можно было составить четырёхугольник?

Решение.

Ясно, что из четырёх отрезков $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ можно составить четырёхугольник тогда и только тогда, когда $a+b+c > d$. Потому из четырёх чисел Фибоначчи F_{a_1}, F_{a_2}, F_{a_3}, F_{a_4} $(0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4)$ можно составить треугольник тогда и только тогда, когда $a_3 = a_4 - 1$, $a_2 = a_4 - 2$ (в этом случае $F_{a_1} + F_{a_2} + F_{a_3} > F_{a_2} + F_{a_3} = F_{a_4}$, а иначе $F_{a_1} + F_{a_2} + F_{a_3} = F_{a_3} + F_{a_2} + F_{a_1} \leqslant F_{a_4-1} + F_{a_4-3} + F_{a_4-4} = F_{a_4}$, то есть иначе нельзя). То есть подходят четвёрки образованные какими-то тремя последовательными числами Фибоначчи и ещё одним меньшим их, и только такие четвёрки подходят. Перейдём от чисел Фибоначчи к их номерам: понятно, что искомых разбиений столько же, сколько разбиений на четвёрки чисел от 1 до $4n$ таких, что в каждой четвёрке есть три последовательных числа и одно меньшее их, поэтому далее считаем количество таких разбиений. В каждом таком разбиении пронумеруем четвёрки натуральными числами от 1 до n всеми возможными способами (этим мы домножим количество способов на $n!$). Далее посчитаем количество способов разбить отрезки на такие занумерованные четвёрки.

Выберем произвольное разбиение на занумерованные четвёрки, пройдём по возрастанию по числам от 1 до $4n$, проходя меньший элемент в j-й четвёрке запишем «над ним» число j, проходя тройку больших элементов в j-й четвёрке запишем «над ней» число j. Таким образом разбиению сопоставилась последовательность из $2n$ чисел, в которой каждое из чисел $1, \ldots, n$ встречается ровно 2 раза. Это соответствие взаимно однозначное, так как есть обратное: выберем произвольную такую последовательность из $2n$ чисел, последовательно пройдёмся по её членам, записывая последовательные натуральные числа (начиная с единицы) и относя их к четвёркам следующим образом: встретив число j в первый раз — запишем «над ним» одно следующее число и отнесём его к j-й четвёрке, а встретив во второй раз — запишим «над ним» три следующих натуральных числа и отнесём их к j-й четвёрке. Ясно, что будут выписаны в точности числа от 1 до $4n$ и для каждого натурального j не превосходящего n к j-й четвёрке будут отнесены четыре числа образующим подходящую четвёрку. По построению тривиально, что построенные соответствия вазаимно обратны друг другу.

Итак, количество разбиений на занумерованные четвёрки совпадает с количеством последовательностей из $2n$ чисел, в которых каждое из чисел $1, \ldots, n$ встречается ровно 2 раза. А таких последовательностей ровно $\dfrac{(2n)!}{2^n}$. Разделив на $n!$, получаем окончательный ответ на исходный вопрос задачи:

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} = (2n-1)!!.$$

Ответ: $(2n-1)!!$.

Критерии.

Оценка не снижается за отсутствие доказательства утверждения: «из отрезков длин $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ можно составить 4-угольник $\Longleftrightarrow a+b+c > d$». Оценка не повышается непосредственно за формулировку и доказательство этого утверждения.

2 балла: только верный ответ.

2 балла: задача только сведена к нахождению количества способов разбить числа 1,2,...,4n на четвёрки так, чтобы в каждой вместе с максимальным числом были 2 предыдущих, или аналогичное. Или доказано только, что если из четырёх из данных отрезков можно составить 4-угольник и x_k максимальный из них, то среди этих 4 отрезков есть x_{k-1} и x_{k-2}.

4 балла: есть продвижения из обоих критериев выше, далее ничего содержательного.

6 баллов: задача верно сведена к нахождению количества способов разбить числа 1, 2, ..., $4n$ на четвёрки так, чтобы в каждой вместе с максимальным числом были 2 предыдущих. Далее не доказано, но явно сформулировано, что «способы разбиения чисел на четвёрки находятся во взаимнооднозначном соответствии со способами разбить числа 1, 2, ..., $2n$ на пары», как именно строится соответствие не описано. Возможно, есть верный ответ. Нет других продвижений в решении задачи.

13 баллов: доказано, что ответом является количество способов разбить $2n$ элементное множество на неупорядоченные пары, но это количество найдено неверно или не найдено. В частности, сюда относится случай, когда при подсчёте этого получен ответ в $n!$ раз больший правильного из-за того, что по факту подсчитано количество способов последовательно выбрать n непересекающихся пар.

13 баллов: из утверждения о том, что если из четырёх из данных отрезков можно составить 4-угольник и x_k максимальный из них, то среди этих 4 отрезков есть x_{k-1} и x_{k-2}, верно найдено искомое количество разбиений. Доказательство утверждения неверное, или неполное, или отсутствует. Более ничего.

Задача 11.5. *(20 баллов)* Деревни некоторой языческой страны соединены дорогами так, что от любой деревни можно добраться до любой другой не проходя ни через какую деревню дважды, причём сделать это можно единственным способом. В каждой деревне живет свое племя туземцев. Каждое племя поклоняется одному из трёх идолов: Камню, Ножницам или Бумаге. Известно, что Камень сильнее Ножниц, Ножницы сильнее Бумаги, а Бумага сильнее Камня. Каждое племя желает, чтобы их идол был не слабее, чем идол любого из соседствующих с ними племен. С этой целью каждый вечер ровно в 20:24 каждое племя смотрит на своих соседей и, если обнаруживает соседа с более сильным идолом, меняет свои верования, начиная поклоняться этому более сильному идолу. Верно ли, что рано или поздно все племена начнут верить в одного и того же идола?

Решение.

Верно. Рассмотрим граф, вершины которого отвечают племенам, а рёбра проводятся между вершинами, которые отвечают соседним племенам. Согласно условию, этот граф является деревом. Докажем утверждение задачи индукцией по n — количеству вершин в дереве. База индукции при $n = 1$ очевидна, так как в этой ситуации вообще не происходит смен вероисповедания единственного существующего племени.

Предположим, что мы уже доказали утверждение задачи для любого n-вершинного дерева, покажем, что тогда оно верно и для любого $(n+1)$-вершинного дерева G. Пусть v — произвольная висячая вершина дерева G, и пусть она соединена с вершиной u. Покажем, что ситуация, в которой идол v сильнее идола u, произойдёт не более чем один раз.

Действительно, пусть в какой-то момент произошла указанная ситуация. Тогда прямо после этого идол u стал таким же, как идол v. После этой ситуации идол v менялся тогда и только тогда, когда идол u становился сильнее него. При этом при изменении идола v идол u либо оставался неизменным, либо становился сильнее уже нового идола v. Итак, в каждый момент времени будет происходить одна из двух ситуаций: либо у v и u одинаковый идол, либо идол v слабее идола u.

Значит, найдётся такой момент времени, после которого вершина v вообще никак не влияет на то, как меняются идолы у остальных вершин, причём идол v не сильнее идола u. Тогда, согласно индукционному предположению, рано или поздно все вершины, кроме, быть может, v, будут верить в одного и того же идола. В этот же момент времени идол v не сильнее идола u, потому на следующий день идолы у всех племён гарантированно будут одинаковыми.

Критерии.

0 баллов: нет ничего кроме переформулировки на языке графов; неразвитой идеи индукции; неразвитой идеи рассматривать висячую вершину; верного ответа.

Задача 11.6. *(20 баллов)* Сфера касается всех рёбер пирамиды, в основании которой лежит выпуклый 2024-угольник. Покрасим в шахматном порядке углы между последовательными рёбрами при вершине вне многоугольника в синий и красный цвета. Докажите, что произведение синусов половинок синих углов равно произведению синусов половинок красных.

Решение.

Пусть A_1, $A_2, \ldots, A_{2024}$ — основание пирамиды, а O — её вершина вне основания. Пусть B_1 $B_2, \ldots, B_{2024}$ — точки, в которых сфера из условия касается отрезков OA_1, $OA_2, \ldots, OA_{2024}$ соответственно, а $T_1, T_2, \ldots, T_{2024}$ — точки в которых она касается отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2024}A_1$ соответственно. Далее $OB_1 = OB_2 = \cdots = OB_{2024}$ (отрезки касательных к сфере из точки O) — обозначим длину каждого из них за z. Рассмотрим треугольник A_1OA_2 и обозначим его угол при вершине O через φ (пусть он для определенности синий), а длины отрезков A_1B_1, A_2B_2 обозначим через x, y соответственно. Имеем $A_1T_1 = A_1B_1 = x$ (отрезки касательных к сфере из точки A_1) и аналогично $A_2T_1 = A_2B_2 = y$. Тогда, согласно теореме косинусов для треугольника A_1OA_2 :

$$(x+y)^2 = (z+x)^2 + (z+y)^2 - 2(z+x)(z+y)\cos\varphi;$$
$$xy = z^2 + xz + yz - (z+x)(z+y)\cos\varphi.$$

Откуда, прибавив к обеим частям xy, получим: $2xy = (z+x)(z+y)(1-\cos\varphi)$. Или

$$\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1-\cos\varphi}{2} = \frac{xy}{(z+x)(z+y)} = \frac{A_1B_1 \cdot A_2B_2}{OA_1 \cdot OA_2}.$$

Аналогично получаем аналогичные равенства для всех синих углов, а перемножив их получим, что квадрат произведения синусов половинок синих углов равен

$$\frac{A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot \ldots \cdot A_{2024}B_{2024}}{OA_1 \cdot OA_2 \cdot \ldots \cdot OA_{2024}}.$$

Аналогично этому же произведению равен квадрат произведения синусов половинок красных углов. Осталось лишь заметить, что оба произведения положительны, потому и сами они равны.