Решения.

Задача 8.1. *(15 баллов)* В школьную столовую собираются завезти шесть видов шоколадных батончиков. По ГОСТу требуется, чтобы цены батончиков были натуральными числами и суммарная стоимость шести различных батончиков была равна 101 рублю. Кроме того, администрация хочет установить цены так, чтобы для любых двух школьников, купивших одинаковое количество батончиков — не более одного каждого вида, стоимости их покупок отличались меньше чем на некоторое натуральное d. При каком наименьшем d администрация сможет этого добиться?

Решение.

Если $d = 1$, то все цены должны быть равными. Однако 101 не делится на 6, поэтому этот случай невозможен. Сделаем цены такими: 5 батончиков по 17 рублей и один по 16 рублей. Тогда у двух школьников, купивших одинаковое количество батончиков, либо стоимости покупок равны, либо отличаются на 1 (если ровно один из них взял батончик за 16 рублей). Значит, искомое $d = 2$.

Критерии.

A0: не снижались баллы, если в условии прочитали «не больше чем на d» вместо «меньше чем на d».

A1: 5 баллов — d не равно 1;

A2: 5 баллов — пример;

A3: 5 баллов — обоснование примера.

Критерии A1, A2 и A3 суммируются.

Задача 8.2. *(15 баллов)* Даны две одинаковые стопки из девяти карточек, на которых написаны числа 0, 1, 2, ..., 8. Можно ли разложить эти карточки по кругу так, чтобы нули лежали рядом, между единицами лежала ровно одна карточка, ..., между карточками с числом k лежало ровно k карточек, ..., между карточками с числом 8 лежало ровно 8 карточек?

Решение.

Можно. Расставим карточки в таком порядке по кругу: 7, 5, 3, 1, 8, 1, 3, 5, 7, 6, 4, 0, 0, 8, 2, 4, 6, 2. Несложно проверить, что между одинаковыми карточками нужное количество других: например, между карточками с числом 4 расположены карточки с 0, 0, 8 и 2.

Задача 8.3. *(15 баллов)* Параллелепипед $6 \times 5 \times 5$, покрасили снаружи в синий цвет, а потом распилили на единичные кубики. Из какого наибольшего числа кубиков можно сложить синий снаружи параллелепипед без внутренних полостей, используя только кубики с хотя бы одной синей гранью?

Решение.

Заметим, что есть три вида кубиков с синей гранью, а именно, кубики с одной, двумя и тремя синими гранями.

Кубики с тремя синими гранями находятся только в вершинах куба, так что их 8 штук.

Кубики с двумя синими гранями лежат на рёбрах куба, кроме его вершин. На одном ребре длины 6 их поместится $6 - 2 = 4$, таких рёбер 4, поэтому вместе на них $4 \cdot 4 = 16$ кубиков. На ребре длины 5 таких кубиков $5 - 2 = 3$, а всего таких рёбер 8, поэтому на них $3 \cdot 8 = 24$ кубика. Итого, есть $16 + 24 = 40$ кубиков с двумя синими гранями.

Кубики с одной синей гранью лежат на гранях куба, за исключением его рёбер. На гранях со сторонами 5 и 5 их по $(5 - 2)^2 = 9$, а на гранях со сторонами 5 и 6 —

по $(5-2)\cdot(6-2)=12$. Граней 5×5 две, а граней 5×6 четыре, поэтому всего кубиков с одной гранью $12\cdot4+9\cdot2=66$.

Для того, чтобы сложить новый параллелепипед в нашем распоряжении всего $8+40+66=114$ кубиков.

Покажем, что требуемый параллелепипед не удастся сложить из 113 или 114 кубиков. Поскольку 113 — простое число, параллелепипед из 113 кубиков мог бы быть только размеров $113\times1\times1$, но тогда его крайние кубики должны были бы иметь по 5 синих граней, а таких у нас нет.

Число 114 раскладывается на множители как $2\cdot3\cdot19$. Но заметим, что для того, чтобы сложить параллелепипед с ребром 1 нам понадобятся кубики с хотя бы 4 синими гранями. Если же все рёбра больше 1, то они могут быть равны только 2, 3 и 19. Но тогда у нас есть 4 ребра длины 19. Для того, чтобы они были синими, необходимо 8 кубиков с тремя синими гранями, а также не менее $17\cdot4=68$ кубиков с двумя синими гранями, чего мы обеспечить не можем.

Теперь приведём пример для 112 кубиков. Искомый параллелепипед имеет размеры $4\times4\times7$. Тогда на его рёбра уйдёт 8 кубиков с тремя синими гранями и $2\cdot4\cdot2+5\cdot4=36$ кубиков с двумя синими гранями. Хотя бы одна грань каждого из оставшихся кубиков синяя, так что требуемый параллелепипед легко складывается.

Ответ: 112.

Критерии.

A1: 4 балла — доказано, что примера больше чем со 114 кубиками нет;

A2: 5 баллов —доказано, что примера со 114 кубиками нет;

A3: 1 балл — доказано, что примера со 113 кубиками нет;

A4: 5 баллов — приведён пример со 112 кубиками.

Критерии A1, A2, A3, A4 суммируются.

B1: до -3 баллов —ошибка в подсчёте кубиков в примере;

C1: 6 баллов — доказано, что если параллелепипед с рёбрами x, y, z можно собрать, то $xyz\leqslant114$, $x+y+z\leqslant16$, далее неверно.

Задача 8.4. *(15 баллов)* Найдите все пары целых $(x;y)$, для которых верно равенство

$$\sqrt{x-\sqrt{y}}+\sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{xy}.$$

Решение.

Заметим, что $x,y\geqslant0$ из-за области определения квадратного корня. Если $x=0$, то $y=0$. Получили решение $(0;0)$, далее полагаем, что $x,y>0$.

Возведём в квадрат обе части уравнения (это можно сделать, т.к. с обеих сторон неотрицательные числа). Имеем:

$$x-\sqrt{y}+x+\sqrt{y}+2\sqrt{x^2-y}=xy \quad\Leftrightarrow\quad x(y-2)=2\sqrt{x^2-y}.$$

Правая часть последнего уравнения неотрицательна, поэтому $y\geqslant2$. Возведя уравнение в квадрат ещё раз, получаем:

$$x^2y^2-4x^2y+4x^2=4x^2-4y \quad\Leftrightarrow\quad x^2(y^2-4y)=-4y \quad\Leftrightarrow$$

$$x^2(4y-y^2)=4y \quad\Leftrightarrow\quad x^2(4-y)=4.$$

Последний переход возможен в силу положительности y.

Заметим, что при $y\geqslant4$ правая часть не больше 0, однако 4 больше нуля, поэтому такие случаи нам не подходят. Значит, $y\leqslant3$. Вспоминая, что $y\geqslant2$, понимаем, что достаточно рассмотреть случаи $y=2$ и $y=3$.

При $y = 2$ получаем, что $x^2 = 2$, что невозможно для натуральных x.

При $y = 3$ получаем, что $x^2 = 4$, откуда $x = 2$. Итак, второе решение — пара $(2; 3)$.

Ответ: $(0; 0)$, $(2; 3)$.

Критерии.

A1: 4 балла — избавились от корней;

A2: 2 балла — только ответ (полный и правильный);

Критерии A1 и A2 суммируются.

B1: -3 балла — неравносильный переход без проверки с помощью подстановки, остальное верно;

B2: -1 балл — потеряно решение $(0; 0)$, остальное верно.

Критерии B1 и B2 могут применяться одновременно.

Задача 8.5. *(20 баллов)* В треугольнике ABC проведена высота BH. Точка N симметрична H относительно середины стороны AC. Предположим, что $BN = AC$. Докажите, что ортоцентр делит отрезок BH в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

Решение.

Для удобства будем считать, что $AB \leqslant BC$ (тогда $AH \leqslant HC$). Продлим основание AC за вершину A и отметим на продолжении такую точку M, что $AM = AH$. Проведём из точки N перпендикуляр NX к прямой MB. Поскольку

$$BN = AC = AN + NC = AN + AM = MN,$$

треугольник MNB равнобедренный и высота NX к основанию является медианой. То есть $MX = XB$. Проведём через точку X среднюю линию XT треугольника MBH, параллельную MH. Тогда $XT = 0{,}5MH = NC$ и $XT \parallel NC$. Следовательно, $CNXT$ — параллелограмм и $NX \parallel CT$. То есть CT и MB взаимно перпендикулярны, и точка T — точка пересечения высот треугольника MBC.

Пусть S — точка пересечения высот треугольника ABC. Рассмотрим прямые MT и AS: они параллельны, AS делит отрезок MH пополам. Значит, AS делит отрезок TH пополам. Поскольку T — середина BH, получим требуемое: $BS : SH = 3 : 1$.

Критерии.

A1: 0 баллов — равенство $BN = AC$ не используется.

Задача 8.6. *(20 баллов)* Дана таблица с n строками и десятью столбцами, Петя и Вася по очереди ставят в клетки таблицы крестики и нолики. За ход Петя ставит два крестика (или, если осталось одно незаполненное поле, то 1 крестик), а Вася ставит один нолик. Начинает Петя. Игра заканчивается, когда все клетки таблицы заполнены. Если есть строка, заполненная только крестиками, побеждает Петя, иначе Вася. Для какого минимального n Петя может гарантировать себе победу?

Решение.

Если в таблице хотя бы 256 строк, побеждает Петя. Действительно, он может сначала в каждую строку поставить по крестику — это 128 ходов, Вася за 128 ходов поставит по нолику не более чем в 128 из этих строк. Дальше Петя выбирает 128 строк, которые пока не содержат ноликов и ставит в них по второму крестику — 64 хода, Вася «испортит» не более 64 строк. И так далее до получения Петей двух строк с 8 крестиками. Вася «испортит» из них не больше одной, и Петя сможет поставить 2 крестика в другую.

Теперь докажем, что при меньшем числе строк Вася может гарантировать себе победу. Пусть Вася ставит нолик в ту же строку, что и Петя, если тот поставил два крестика в одну строку. В ином случае Вася ставит нолик в одну из строк с наибольшим числом крестиков среди тех, в которых ещё нет ноликов. Если ни одно из этих действий невозможно, Вася может ставить нолик на любое свободное место.

Пусть победил Петя. Забудем про все ходы, на которых все символы были поставлены в одну строку, и соответствующие им строки — в таких строках есть хотя бы по одному нолику, значит, ни в одной из них Петя не сможет поставить 10 крестиков. Тогда за ход до победы у Пети была строка хотя бы с 8 крестиками и без 0. Если Вася не поставил туда 0, была ещё хотя бы одна строка хотя бы с 8 крестиками. Они могли получиться только если строк с 7 крестиками было не меньше 4: если в двух строках хотя бы с 7 крестиками не стоят 0, то было ещё хотя бы две строки, в которых не меньше 7 крестиков, и в которые Вася поставил нолики.

Аналогичным образом доказываем, что строк с 6 крестиками должно было быть хотя бы 8, с 5 — 16, ... с 1 — 256.

Критерии.

А1: 10 баллов — приведена стратегия для Пети для 256 строк и доказано, что она приведёт к успеху;

А2: 7 баллов — стратегия на 512 или 1024, потому что не учтено, что в конце в одну строку можно поставить два крестика;

В1: 10 баллов — оценка (доказательство, что Вася победит, если сторона меньше 256).