Решения.

Задача 9.1. *(15 баллов)* Петя задумал число x, а Вася — число y, причём Петино число оказалось больше. Затем Петя нашёл значение выражения $\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$, а Вася — выражения $\dfrac{y^3}{y^2+y+1}$. Обязательно ли полученное Петей число будет больше Васиного?

Решение.

Рассмотрим разность новых чисел:

$$\frac{x^3}{x^2+x+1}-\frac{y^3}{y^2+y+1}=\frac{x^3\left(y^2+y+1\right)-y^3\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)\left(y^2+y+1\right)}.$$

Заметим, что $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ при любом x, поэтому знаменатель полученной дроби всегда положителен. Рассмотрим числитель:

$$x^3y^2-y^3x^2+x^3y-y^3x+x^3-y^3=x^2y^2(x-y)+xy\left(x^2-y^2\right)+\left(x^3-y^3\right)=$$

$$=(x-y)\left(x^2y^2+xy(x+y)+x^2+xy+y^2\right).$$

Множитель $x-y$ положителен, поскольку Петино число больше Васиного. Рассмотрим второй множитель как квадратный трёхчлен относительно x:

$$x^2\left(1+y+y^2\right)+x\left(y+y^2\right)+y^2.$$

Его дискриминант равен $-3y^4-2y^3-3y^2=-y^2\left(3y^2+2y+3\right)$. Трёхчлен $3y^2+2y+3$ принимает только положительные значения, а значит, дискриминант неположителен. Равняться нулю он может только если $y=0$, но в этом случае $x=0$, что противоречит условию. Тогда дискриминант строго отрицателен, а поскольку коэффициент $1+y+y^2$, стоящий при x^2, всегда положителен, рассмотренный квадратный трёхчлен принимает только положительные значения. Значит, разность новых чисел всегда больше нуля, поэтому полученное Петей число всегда будет больше Васиного.

Критерии.

A1: +1 балл — рассмотрена разность чисел из условия;

A2: +2 балла — приведено к общему знаменателю, объяснено, что знаменатель больше 0;

A3: +2 балла — вынесено за скобки выражение $x-y$.

Критерии A1, A2 и A3 суммируются.

Задача 9.2. *(15 баллов)* Имеется 26 карточек: по две штуки с числами 1, 2, 3, ..., 13. Требуется разложить эти карточки по стопкам так, чтобы:

- любые две одинаковые карточки лежали в одной стопке;
- если две карточки лежат в одной стопке, карточка с суммой чисел на них не лежит в той же стопке.

Каким минимальным количеством стопок можно обойтись?

Решение.

Докажем, что двумя стопками обойтись не удастся. Предположим противное. Пусть карточки с числом 1 лежат в первой стопке, тогда карточки с двойкой должны лежать во второй, а с четвёркой — снова в первой. Карточки с тройкой нельзя класть в первую стопку (т.к. 1+3 = 4), значит они лежат во второй. Но тогда карточки с числом 5 нельзя положить ни в первую стопку (т.к. $1 + 4 = 5$), ни во вторую ($2 + 3 = 5$). Противоречие.

Теперь приведём пример для трёх стопок (число обозначает карточку с таким числом).

Первая стопка: 1, 1, 4, 4, 10, 10, 13, 13.

Вторая стопка: 2, 2, 3, 3, 11, 11, 12, 12.

Третья стопка: 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9.

Ответ: тремя стопками.

Критерии.

A1: +5 баллов — правильная оценка (доказано, что двумя стопками обойтись не удастся);

A2: +10 баллов — правильный пример (на три стопки).

Критерии A1 и A2 суммируются.

Задача 9.3. *(15 баллов)* Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке P. Известно, что периметры треугольников APB и CPD равны. Обязательно ли трапеция $ABCD$ является равнобедренной?

Решение.

Заметим, что у треугольников APB и CPD равны также и площади. Действительно, площади треугольников ABD и ACD равны, поскольку они имеют общую сторону и равные высоты к этой стороне, а при вычитании из площадей этих треугольников площади ΔAPD получаются площади треугольников APB и CPD.

Следовательно, у этих треугольников равны радиусы вписанных окружностей (из формулы $S = pr$, здесь через p обозначен полупериметр данных треугольников). Из равенства радиусов вписанных окружностей получаем, что отрезки касательных, проведенных из точки P к вписанным окружностям данных треугольников тоже равны. Далее заметим, что эти отрезки равны $p - AB$ и $p - CD$ соответственно, следовательно, $AB = CD$.

Ответ: Да, обязательно.

Критерии.

A1: +2 балла — равенство площадей APB и CPD (можно без доказательства);

A2: +3 балла — равенство радиусов вписанных окружностей APB и CPD (с доказательством).

Критерии A1 и A2 суммируются.

Задача 9.4. *(15 баллов)* Многие учащиеся математического кружка остаются в нём преподавать после выпуска. Будем говорить, что Ваня является *последователем* Саши, если Ваня учился у Саши или если Ваня учился у ученика Саши, ученика ученика Саши и так далее. Преподаватель кружка называется *народным*, если у него есть последователи, и не менее половины из них — победители международной олимпиады IMO. Известно, что всего в кружке училось 100 победителей IMO. Какое наибольшее количество народных преподавателей может быть в этом кружке, если у каждого человека не более одного учителя и никто не является собственным последователем?

Решение.

Построим ориентированный граф, вершинами которого будут учащиеся и преподаватели кружка, а ребро проводится от учителя к его ученику. Таким образом, наш граф представляет собой набор непересекающихся деревьев.

Ответ: 200.

Пример: Возьмём путь на 201 вершине, ориентируем рёбра сверху вниз и в нижние 100 вершин поставим победителей IMO. Тогда все вершины кроме самой нижней будут народными учителями.

Оценка: Рассмотрим все вершины, которые соответствуют народным учителям, никакой из предков которых не является народным учителем. Пусть в поддереве (не считая саму вершину) некоторой такой вершины s победителей IMO. Поскольку выбранной вершине соответствует народный учитель, среди его последователей не более s человек, не являющихся победителями IMO. Значит, всего в поддереве (считая корень) не более $2s+1$ вершины. Из них народным учителям могут соответствовать не более $2s$ вершин, так как найдётся хотя бы один человек, который никого не учил. Таким образом, число народных учителей в поддереве не может превышать число победителей IMO более чем в 2 раза.

Поскольку поддеревья, соответствующие выбранным нами народным учителям, не пересекаются, просуммировав по ним число народных учителей, получим, что оно не превышает удвоенное число победителей, то есть 200.

Критерии.

A1: 5 баллов — пример.

Задача 9.5. *(20 баллов)* Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. На S_1 и S_2 выбраны точки B и A соответственно такие, что отрезки O_1A и O_2B касаются окружностей и пересекаются в точке C. Докажите, что углы AKC и KBC равны.

Решение.

Решение: Заметим, что четырехугольник O_1BAO_2 вписанный, причем коэффициент подобия треугольников O_1BC и O_2AC равен r/R, где r и R радиусы окружностей S_1 и S_2 соответственно. Следовательно, $O_1C : O_2C = r : R = O_1K_2 : O_2K$, значит, CK — биссектриса треугольника O_1CO_2. Обозначим угол KO_2A через 2α и KO_1B через 2β, тогда $\angle O_1KB = 90 - \beta$, $\angle O_2KA = 90 - \alpha$, $\angle BKA = \alpha + \beta$, $\angle CAK = \alpha$, $\angle CBK = \beta$. Пусть $\angle BKC = x$, $\angle AKC = y$, тогда так как углы O_1CK и O_2CK равны, получаем, что $x+\beta = y+\alpha$. Наконец заметим, что $x+y = \alpha+\beta$ из подсчёта углов при вершине K. Из полученной системы уравнений находим требуемое: $\angle AKC = y = \beta = \angle KBC$.

Критерии.

A1: 10 баллов — CK биссектриса треугольника O_1CO_2.

Задача 9.6. *(20 баллов)* Дан приведённый квадратный трёхчлен f с целыми коэффициентами. Известно, что если $f(x)$ (x целый) делится на некоторое простое $p > 2024$, то $f(x)$ также делится на p^2. Докажите, что тогда это свойство верно и для всех простых $p < 2024$.

Решение.

Пусть $f(x) = x^2 + bx + c$ и для некоторого $p > 2024$ есть целый x такой, что $f(x)$ делится на p. Тогда $f(x+p) = (x+p)^2 + b(x+p) + c = f(x) + p(2x+p+b)$ тоже делится на p, а значит $x^2 + bx + c$ и $(x+p)^2 + b(x+p) + c$ делятся на p^2. Отсюда следует, что $2px + bp$ делится на p^2, а $2x + b$ делится на p. Возведём в квадрат и вычтем $4f(x)$ — полученное выражение будет также делиться на p^2:

$$4x^2 + 4bx + b^2 - 4x^2 - 4bx - 4c = b^2 - 4c.$$

Значит, если $b^2-4c \neq 0$, таких конечное число — все они находятся среди делителей b^2-4c, назовём их $p_1, p_2, \ldots p_k$. Покажем, что так не бывает, предъявив ещё одно такое p. Например, ещё простой делитель найдётся у $f\left(cp_1p_2 \ldots p_k\right) = c\left(cp_1{}^2 \ldots p_k{}^2 + bp_1 \ldots p_k + 1\right)$, потому что число в скобках больше всех наших простых и оно с ними всеми взаимно просто. Таким образом, $b^2 - 4c = 0$, а значит, $f(x)$ имеет вид $(x+t)^2$, где t — целое число. Тогда если $(x+t)^2$ делится на произвольное простое p, то $x+t$ также делится на p, а значит, $(x+t)^2$ делится на p^2.