

Олимпиада «Высшая проба» проводится при поддержке Сбера, приветствуем участников соревнования! Поздравляем — ты являешься участником заключительного этапа олимпиады по направлению «Математика»! Сбер, как и ты, всегда стремится к амбициозным задачам и гениальным прорывам. Желаем тебе блистательной победы!



Время выполнения заданий — 240 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 9.1. (15 баллов) Саша придумал новое умножение: $a \diamond b = 1/b + 1/a$. Вычислите $(\dots((1 \diamond 2) \diamond 3) \dots) \diamond 2025$.

Задача 9.2. (15 баллов) Можно ли заполнить квадратную таблицу 36×36 действительными числами таким образом, чтобы в каждом квадрате 9×9 сумма чисел была не меньше 41, а в каждом прямоугольнике 8×10 (горизонтальном или вертикальном) сумма чисел не превосходила 40?

Задача 9.3. (15 баллов) Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, оба степени n со старшими коэффициентами 1. У каждого из них ровно n различных целых корней. Известно, что все корни многочлена $P(x)$ чётны, а все корни многочлена $Q(x)$ нечётны. Докажите, что у многочлена $P(x) + Q(x)$ не может быть целых корней.

Задача 9.4. (15 баллов) К стене приколочена клетчатая доска размера $n \times n$. Сколькими способами можно раскрасить её клетки в белый и чёрный цвета так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было по две клетки каждого цвета?

Задача 9.5. (20 баллов) Покажите, как разрезать правильный треугольник на многоугольные куски, из которых можно сложить квадрат. Куски разрешается параллельно переносить или поворачивать на 180° , а все другие преобразования запрещены.

Задача 9.6. (20 баллов) На клетчатой бумаге выбрали n подряд идущих по горизонтали клеток и отметили все их вершины (получили $2n+2$ отмеченных точек). Алиса и Боб играют в игру. Они ходят по очереди, и каждый в свой ход соединяет отрезком две отмеченные точки, соседние по горизонтали или вертикали. Первой ходит Алиса. Нельзя пропускать ход, нельзя повторять уже сделанный кем-то ход и нельзя использовать отмеченную точку, если она уже соединена с двумя соседними. Боб выигрывает, если в какой-то момент игры из проведённых отрезков сложится прямоугольник. Если этого не произойдёт, то выигрывает Алиса. При каких значениях n у Алисы есть выигрышная стратегия?