

Всероссийская олимпиада школьников «Высшая проба»

2026 год

2 этап

Решения задач

Математика, 10 класс

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

10.1. Дан многочлен $P(x) = x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 6x + 1$. Существует ли натуральное n , при котором многочлен $(P(x))^n$ не имеет отрицательных коэффициентов? (М.В. Алексеев)

Ответ. Не существует.

Решение. Вычислим значения P в -1 и 1 : $P(1) = 12, P(-1) = -12 = -P(1)$. Предположим, что существует n , при котором многочлен $Q(x) = (P(x))^n$ не имеет отрицательных коэффициентов. Тогда возможны два варианта: оно четное, и оно нечетное. Рассмотрим эти случаи.

1) Пусть n четное. Тогда $Q(1) = 12^n, Q(-1) = (-12)^n = 12^n = Q(1)$. Сумма коэффициентов многочлена Q , стоящих на нечетных местах, равна $\frac{Q(1) - Q(-1)}{2} = 0$. Так как Q имеет некоторые строго положительные коэффициенты при нечетных степенях (например, коэффициент при x равен $6n > 0$), Q обязан иметь отрицательные коэффициенты при некоторых других нечетных степенях, иначе указанная сумма не может быть равной нулю. Таким образом, n не может быть четным.

2) Пусть n нечетное. Тогда $Q(1) = 12^n, Q(-1) = (-12)^n = -Q(1)$. Сумма коэффициентов многочлена Q , стоящих на четных местах, равна $\frac{Q(1) + Q(-1)}{2} = 0$. Так как Q имеет некоторые строго положительные коэффициенты при четных степенях (например, коэффициенты при x^{4n} и свободный член равны 1), Q обязан иметь отрицательные коэффициенты при некоторых других четных степенях, иначе указанная сумма не может быть равной нулю. Таким образом, n не может быть нечетным.

Отсюда следует, что такого n не существует.

Критерии. Максимальный балл: 11.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	11
Не предъявлен явно ненулевой коэффициент у $(P(x))^n$	10
Разобран только случай нечетного или только четного n , в котором показано, что существует нужный положительный коэффициент	7
Решение построено только на замене $t = x + 1/x$ и ссылке на наличие отрицательных коэффициентов при t в многочлене $(t^2 + 6t - 4)^n$ без дополнительных рассуждений	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

10.2. На окружности отмечено 1000 синих точек. Известно, что каждая из них является вершиной равнобедренного треугольника, остальные вершины которого тоже синие. Могло ли оказаться так, что общее количество равнобедренных треугольников с синими вершинами составляет ровно 10000? (М.В. Алексеев)

Ответ. Могло.

Решение. Покажем, что такое возможно. Приведем несколько возможных примеров.

Пример 1. Вначале докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть на окружности отмечены два конечных множества точек. Тогда можно повернуть одно множество относительно другого так, чтобы не осталось равнобедренных треугольников, вершины которых лежат в разных множествах.

Доказательство леммы. Зафиксируем одно из этих множеств и затем отметим зеленым цветом все точки, в которых могли бы быть вершины равнобедренных треугольников, ровно две вершины которых принадлежит этому множеству. Таких точек конечное множество, поэтому зеленых точек в совокупности с точками первого множества тоже конечно — это множество обозначим за A . Аналогично отметим для второго исходного множества красным цветом точки, в которых могли бы быть вершины равнобедренных треугольников, ровно две вершины которых принадлежат этому множеству. Множество красных точек в совокупности с точками второго исходного множества назовем B . Будем вращать множество B по окружности и отметим все моменты когда первая точка из C совпала с каждой из точек из A , вторая точка из B совпала с каждой из точек B , и т.д. последняя точка из B совпала с каждой из точек A (на самом деле, достаточно отслеживать лишь моменты, в которых зеленые точки из A совпадали с некрасными точками из B , и моменты, в которых красные точки из B совпадали с незелеными точками из A). Таких моментов будет конечное число, так как всего пар точек A, B конечно. Но возможных поворотов бесконечно много, поэтому будут повороты, в которых никакие точки из A и повернутого B не совпали. Лемма доказана.

Из леммы индуктивно следует, что, выбирая подходящие повороты, можно разместить любой конечный набор конечных множеств на окружности так, чтобы не было равнобедренных треугольников с вершинами из разных множеств. Будем строить пример с помощью правильных многоугольников, пошагово добавляя точки новых правильных многоугольников на окружность, каждый раз выбирая нужный поворот, который, как следует из леммы, всегда существует. Как известно, в правильном n -угольнике ровно $n \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \right)$ равнобедренных треугольников с вершинами в его вершинах, если n не кратно 3, и $n \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \right) - \frac{2}{3}n$, если n кратно 3. Возьмем 44 правильных 22-угольника, что даст 968 синих точек и ровно $44 \cdot 22 \cdot 10 = 9680$ равнобедренных треугольников. Далее возьмем правильный 26-угольник, который даст $26 \cdot 12 = 312$ равнобедренных треугольников. Останется $1000 - 968 - 26 = 6$ точек, которые мы поместим в вершины правильного шестиугольника, который дает 8 равнобедренных треугольников. Итого мы имеем ровно $9680 + 312 + 8 = 10000$ равнобедренных треугольников на 1000 отмеченных синих точках. Очевидно, что каждая из них является вершиной некоторого равнобедренного треугольника с синими вершинами.

Пример 2. Возьмем 60 правильных 10-угольников и 10 правильных 40-угольников. Тогда будет $60 \cdot 10 + 10 \cdot 40 = 1000$ вершин и $60 \cdot 40 + 10 \cdot 760 = 2400 + 7600 = 10000$ равнобедренных треугольников.

Критерии. Максимальный балл: 13.

Содержание критерия	Балл
Приведен подходящий пример и доказана его корректность	13
Объяснено, как нужно поворачивать конечные множества, чтобы избавиться от «перекрестных» равнобедренных треугольников	6
Присутствует идея построения примера с использованием правильных многоугольников с общим числом вершин 1000, но пример неверный	4
Приведена и доказана формула нахождения количества равнобедренных треугольников в вершинах данного правильного n -угольника	3
Приведен пример на 1000 равнобедренных треугольников	3
В примере есть точки, которые не являются вершинами никакого равнобедренного треугольника	1
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

10.3. В некоторой стране 100 городов, один из которых — столица. Некоторые пары городов соединены двусторонним железнодорожным сообщением, причем известно, что из любого города можно проехать в любой другой пользуясь железнодорожным транспортом, а также что между любой парой городов проходит не более одной железной дороги. На каждой дороге установлен тариф проезда: 2, 6, 10 или 18 монет, не зависящий от направления проезда вдоль нее (но, возможно, неодинаковый по всей стране).

В день концерта многие жители страны решили посетить столицу. Каждый ехал из своего города в столицу самым дешевым маршрутом, состоящим из нескольких железнодорожных проездов, а если таковых было несколько — выбирал любой. Известно, что каждой железной дорогой воспользовался хотя бы один из посетителей концерта. Найдите наибольшее возможное количество железных дорог в этой стране. (Г.Ю. Караваев)

Ответ. 2500.

Решение. Оценка. Для удобства разделим цены на 2 и будем считать, что они равны 1, 3, 5, 9 монет (это не повлияет на сравнение стоимостей проезда). Рассмотрим граф, в котором вершинами будут города, а ребрами — железные дороги. Назовем удаленностью города T наименьшую сумму $n(T)$ (в монетах), которую нужно заплатить, чтобы приехать в столицу из этого города (удаленность столицы положим равной нулю). Путь из города в столицу, имеющий наименьшую цену, назовем экономичным.

Лемма. Подпуть экономичного пути экономичен.

Доказательство леммы. Зафиксируем произвольный город X . Если некоторый экономичный путь ℓ из любого другого города Y проходит через X , то всегда есть экономичный путь из X , получаемый удалением отрезка пути перед X (он не обязан быть единственным, но он точно обязан быть экономичным, в противном случае мы бы объединили отрезок ℓ от Y до X и экономичный путь из X , то получили бы экономичный путь из Y , который дешевле ℓ , что противоречит экономичности ℓ). Поэтому всякий экономичный путь любого города, проходящий через X , содержит некоторый экономичный путь из X .

Следствие. Пусть AB — ребро стоимости p между городами A и B . Тогда $|n(A) - n(B)| = p$. *Доказательство.* По условию, AB было частью какого-то экономичного пути (из некоторого города T), а значит, оно содержало и экономичный путь из A или из B , пусть из A . Тогда и подпуть этого экономичного пути из T , начинающийся в A обязан быть экономичным, а значит, и из B тоже, следовательно, нормы городов A и B различаются ровно на p .

Теперь заметим, что норма соседних городов отличается ровно на нечетное число. Таким образом, все города делятся на города с четной и нечетной удаленностью, а соединенными ребром оказываются в точности города с разной четностью удаленности — следовательно, граф дорог является двудольным, где долям соответствуют все города с равной четностью удаленности. В двудольном графе на 100 вершинах не может быть больше 2500 ребер.

Пример. Покажем, что ровно 2500 дорог быть могло. Пусть стоимость проезда на каждой дороге одинакова. Тогда каждый посетитель концерта из доли с нечетной нормой едет напрямую в столицу по одной дороге, поэтому каждое ребро между столицей и каждым нечетным городом могло быть использовано, а каждый посетитель из четной доли (в которой находится столица) может выбрать любой путь из двух ребер, первое из которых соединяет его город с каким-нибудь городом из нечетной доли, а второе — от этого города до столицы. Так как все пути имеют равную ценность, каждое ребро между четным городом, отличным от столицы, и каждым нечетным городом могло быть использовано.

Критерии. Максимальный балл: 16.

Содержание критерия	Балл
Доказана правильная оценка и приведен подходящий пример	16
Полная оценка без примера	12
Приведен пример на 2500 или доказана одна из лемм	6
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

10.4. Дана функция f , определенная на всей числовой прямой и принимающая числовые значения, такая, что для любых двух чисел x, y верно равенство

$$f(x+y) = f(x)f(2026-y) + f(2026-x)f(y).$$

Обязательно ли $f(1) < 1$?

(Г.Ю. Караваяев)

Ответ. Обязательно.

Решение. Для начала подставим $x = 0$ и $y = 0$ и получим $f(0) = 2f(0)f(2026)$. Значит, либо $f(0) = 0$, либо $f(2026) = 1/2$.

Теперь подставим $x = 0$ и $y = 2026$ и получим $f(2026) = f(0)^2 + f(2026)^2$, а значит, если $f(0) = 0$, $f(2026)$ равняется либо 0, либо 1. Из этого следует, что $f(2026) \leq 1$, причем если $f(2026) = 1$, то $f(0) = 0$. Подставим $y = 2026 - x$ и получим $f(2026) = f(x)^2 + f(2026 - x)^2$, а значит, $f(x)^2 \leq f(2026)$. В частности, $f(1) \leq f(2026) \leq 1$.

Осталось показать, что $f(1) \neq 1$. Предположим обратное. Тогда $f(2026) \geq f(1)^2 = 1 \Rightarrow f(2026) = 1$, $f(0) = 0$. Покажем, по индукции, что для всех натуральных n выполняется $|f(n)| = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}$ и $|f(2026 - n)| = \frac{1 + (-1)^n}{2}$.

База индукции. Так как $f(1) = 1$, а $f(2025)^2 = f(2026) - f(1)^2 = 0$, откуда $f(2025) = 0$.

Шаг индукции. Пусть для $n - 1$ утверждение верно. Докажем утверждение для n . Для этого заметим, что $|f(n)| = |f((n-1) + 1)| = |f(n-1)f(2025) + f(2026 - (n-1))f(1)| = |f(2026 - (n-1))| = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}$ и $|f(2026 - n)| = \sqrt{f(2026) - f^2(n)} = \sqrt{1 - \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (-1)^n}{2}} = \frac{1 + (-1)^n}{2}$.

Но тогда $1 = f(1013) = f(2026 - 1013) = 0$, что приводит нас к противоречию, а значит, $f(1) < 1$, что и требовалось.

Критерии. Максимальный балл: 18.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	18
Получена оценка $f(1) \leq 1$, не доказано что равенство невозможно	9
Штраф, если в решении присутствовало деление на выражение, про которое не очевидно априори, что оно не равно нулю, а случай равенства нулю не был рассмотрен	-2
Полностью рассмотрен случай $f(0) = 0$, иных продвижений нет	2
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

10.5. Дано натуральное число $n > 4$. Архипелаг Дракона состоит из $3n$ островов. Между островами действуют паромные переправы трех различных транспортных компаний, каждая из которых владеет ровно k различными паромными. Каждый паром осуществляет одностороннюю переправу с одного острова на другой; для всякой упорядоченной пары островов (I, J) и всякой компании существует не более одного парома от I к J , принадлежащего данной компании. Назовем остров A зацикленным посредством компании T , если существует нетривиальный маршрут, использующий только паромы этой компании, который начинается и заканчивается в A . Найдите наименьшее k , при котором обязательно найдется остров, зацикленный посредством всех трех компаний. (М.В. Алексеев)

Ответ. $k = \frac{13n^2 - 5n}{2} + 1$.

Решение. Пример. Построим ориентированный граф, в котором вершины соответствуют островам, ребро $I \rightarrow J$ соответствует парому от I к J , и каждое ребро окрасим в один из трех цветов, соответствующих компании (для каждой упорядоченной пары островов (I, J) может быть до трех ребер $I \rightarrow J$ разных цветов). Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть есть ориентированный граф на m вершинах с E ребрами и известно, что не более ℓ его вершин лежат на каких-то ориентированных циклах. Тогда $E \leq \binom{m}{2} + \binom{\ell}{2}$.

Доказательство леммы. Зафиксируем две вершины u, v . Если хотя бы одна из них не лежит ни на одном цикле, то не более одного ребра $u \rightarrow v$ или $v \rightarrow u$ может быть, поэтому таких «односторонних» ребер не может быть больше $\binom{m}{2}$. Если же обе вершины u, v лежат

на цикле, то в дополнение к посчитанному может добавиться не более $\binom{\ell}{2}$ ребер, откуда $E \leq \binom{m}{2} + \binom{\ell}{2}$. Лемма доказана.

Как следствие, если число ребер превосходит $\binom{m}{2} + \binom{\ell}{2}$, то количество вершин, лежащих на цикле, строго больше ℓ . Пусть $\ell = 2n, m = 3n$. Тогда в случае $k \geq \binom{3n}{2} + \binom{2n}{2} + 1 = \frac{3n(3n-1)}{2} + \frac{2n(2n-1)}{2} + 1 = \frac{13n^2 - 5n}{2} + 1$ найдется хотя бы $2n + 1$ вершин, лежащих на

цикле. В нашем случае это означает, что граф паромов каждой компании имеет не менее $2n + 1$ циклических вершин (то есть лежащих на цикле). При этом всего вершин $3n$. Покажем, что тогда найдется общая для всех циклическая вершина. Мы имеем три подмножества X, Y, Z мощности не менее $2n + 1$ каждое в множестве вершин V мощности $3n$. Тогда мощность дополнения $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ каждого из них не более $n - 1$. Но тогда мощность объединения дополнений $|\bar{X} \cup \bar{Y} \cup \bar{Z}| \leq |\bar{X}| + |\bar{Y}| + |\bar{Z}| = 3n - 3$ и $|X \cap Y \cap Z| = |V \setminus (\bar{X} \cup \bar{Y} \cup \bar{Z})| = |V| - |\bar{X} \cup \bar{Y} \cup \bar{Z}| \geq 3n - (3n - 3) = 3$. Таким образом, найдется не менее трех островов, зацикленных посредством всех трех компаний при $k \geq \frac{13n^2 - 5n}{2} + 1$.

Оценка. Покажем, что при $k \leq \frac{13n^2 - 5n}{2}$ нельзя гарантировать наличие даже одного острова, зацикленного всеми тремя компаниями. Разобьем острова на три части X, Y, Z по n островов в каждой и построим переправы так: для первой компании пустим односторонние паромы между всеми парами островов (в произвольных направлениях), а все пары островов вне X соединим дополнительно между собой одним экземпляром парома, дополняющего каждую переправу до противоположной; аналогично сделаем для второй и третьей компании с частями Y и Z соответственно. Тогда каждая компания владеет ровно $\binom{3n}{2} + \binom{2n}{2} = \frac{13n^2 - 5n}{2}$ паромов. Тем не менее, каждый остров зациклен лишь посредством двух компаний — каждый остров из X второй и третьей, из Y — третьей и первой, из Z — первой и второй. Понятно, что и для всякого меньшего k этот же пример с произвольно удаленными паромов дает контрпример к утверждению. Таким образом, ни для какого меньшего k гарантировать требуемое нельзя, что завершает оценку.

Критерии. Максимальный балл: 20.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	20
Записан ответ $k = \frac{13n^2 - 5n}{2}$ (вместо $k = \frac{13n^2 - 5n}{2} + 1$) при полностью верном решении	20
Оценка на $\frac{13n^2 - 5n}{2}$	14
Доказывалась неверная оценка, отличная от верной более чем на 1	6
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

10.6. На плоскости ввели прямоугольную систему координат и отметили все 10 точек, у которых обе координаты являются натуральными числами, причем абсцисса не превышает 2, а ордината не превышает 5. Каждую пару отмеченных точек с различными абсциссами соединили либо красным, либо синим отрезком. Назовем два отрезка *похожими*, если у них есть общий конец, а угловые коэффициенты прямых, содержащих их, отличаются на 1. За один ход разрешается выбрать любой набор отрезков, состоящий из некоторого отрезка и всех похожих на него, и все красные отрезки из этого набора перекрасить в синий цвет, а все синие — в красный. Всегда ли можно перекрасить все отрезки в один цвет за несколько ходов? (Г.Ю. Караваев)

Ответ. Не всегда.

Решение. Обозначим все точки с координатами $(1, n)$ за A_n , а все точки с координатами $(2, n)$ — за B_n . Назовем множество, состоящее из отрезка XU и всех отрезков, похожих на него, множеством, *порожденным* отрезком XU .

Для начала заметим, что если поочередно перекрасить в противоположный цвет все множества, порожденные отрезками $A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_4, A_2B_5, A_3B_3, A_3B_4, A_3B_5, A_4B_2, A_4B_3, A_4B_4, A_5B_2, A_5B_3, A_5B_5$, то каждый проведенный отрезок изменит свой цвет на противоположный.

Значит, если при некоторой раскраске отрезков можно перекрасить все отрезки в один цвет, то их можно перекрасить и в красный цвет. Более того, если при любой изначальной раскраске можно перекрасить все отрезки в красный цвет, то начиная с полностью красной раскраски можно за несколько ходов получить любую другую раскраску.

Заметим, что если в произвольной последовательности перекрашиваний два перекрашивания поменять местами, это не изменит итогового результата. Значит, любая перестановка перекрашиваний в последовательности тоже не изменит результат.

Более того, если дважды перекрасить в противоположный цвет один и тот же набор отрезков, то это не изменит цвет ни одного из отрезков, а значит, если можно из одной раскраски получить другую некоторой последовательностью действий, то можно сделать это, не перекрашивая одно и то же множество дважды.

Так как порядок действий значения не имеет, каждую последовательность перекрашиваний можно задать множеством перекрашиваемых наборов. Наборов, которые разрешается перекрашивать, столько же, сколько и отрезков: 25, а значит, можно задать 2^{25} различных последовательностей перекрашиваний без повторных перекрашиваний одного и того же набора и без учета порядка действий.

С другой стороны, различных раскрасок тоже 2^{25} , а значит, если из раскраски в красный цвет можно получить любую другую, то все последовательности перекрашиваний без повторов и без учета порядка дают разные результаты.

Но это неверно: если поочередно перекрасить в противоположный цвет все множества, порожденные отрезками $A_1B_1, A_1B_2, A_1B_4, A_1B_5, A_3B_1, A_3B_2, A_3B_4, A_3B_5, A_5B_1, A_5B_2, A_5B_4, A_5B_5$, то ни один отрезок в итоге не изменит свой цвет. Точно так же, ни один отрезок не изменит свой цвет и если не перекрашивать ни одно множество.

Из этого следует, что не всякую раскраску можно получить из полностью красной, а значит и не всегда можно перекрасить все отрезки в один цвет.

Критерии. Максимальный балл: 22.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	22
Показано, что нельзя перекрасить все отрезки в один цвет	16
Показано, как перекрасить все отрезки в противоположный цвет	11
Переформулировка задачи в терминах перекраски клетчатого квадрата 5×5	4
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0