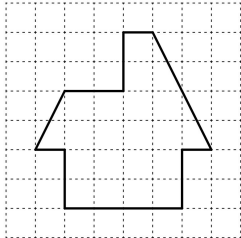


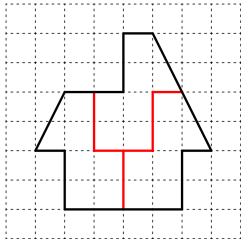
Всероссийская олимпиада школьников «Высшая проба»  
2026 год  
2 этап

Решения задач  
Математика, 7 класс

7.1. Разрежьте данную фигуру на три равные по форме и размеру части. Фигуры, отличающиеся поворотом или отражением, считаются равными. (Г.Ю. Караваев)



Решение. Решение представлено на картинке.



Критерии. Максимальный балл: 9.

| Содержание критерия                                  | Оценка | Балл |
|------------------------------------------------------|--------|------|
| Верное решение                                       | +      | 9    |
| Решение не соответствует ни одному из критериев выше | –      | 0    |

**7.2.** Двадцать три одинаковых блинчика разделили поровну между семью гостями. Назовем кусочком часть блинчика, которая меньше, чем целый блинчик. Какое наименьшее число кусочков могло получиться? (М.В. Алексеев)

*Ответ.* 8 кусочков.

*Решение. Оценка.* Всего каждый гость должен получить  $\frac{23}{7} = 3 + \frac{2}{7}$  блинчиков. Если какой-нибудь гость не получил ни одного кусочка, то у него целое число блинчиков, что противоречит вычисленному, поэтому, число кусочков не меньше 7. Предположим, что их ровно 7. Тогда каждый гость получает ровно один кусочек величиной  $\frac{2}{7}$  блинчика. Так как величины кусочков равны, то их можно было изготовить только из двух целых блинчиков. Но если 7 кусочков составляют в сумме два блинчика, то хотя бы один из блинчиков составлен из не более чем трех кусочков, и тогда величина какого-то из этих не более чем трех кусочков не меньше  $\frac{1}{3} > \frac{2}{7}$ , что противоречит требуемому (аналогично можно заключить, что хотя бы один из блинчиков составлен из не менее чем четырех кусочков, а тогда величина одного из них будет не больше  $\frac{1}{4} < \frac{2}{7}$ ). Значит, 7 кусочков быть не могло и их должно быть хотя бы 8.

*Пример.* Приведем пример, который показывает, что 8 кусочков получиться могло. Сначала каждому гостю выдадим по 3 целых блинчика. Останутся два блинчика, каждый из которых разделим на четыре кусочка следующим образом: три кусочка величинами  $\frac{2}{7}$  и один величиной  $\frac{1}{7}$ . Шесть гостей получают по одному кусочку величиной  $\frac{2}{7}$ , а седьмой — два кусочка величиной  $\frac{1}{7}$ .

*Критерии.* Максимальный балл: 16.

| Содержание критерия                                  | Балл |
|------------------------------------------------------|------|
| Доказана оценка и приведен пример                    | 16   |
| Только оценка                                        | 10   |
| Только пример                                        | 6    |
| Решение не соответствует ни одному из критериев выше | 0    |

**7.3.** Четверо детей (не младше 3 и не старше 12 лет, возраст считается целым числом лет) сделали по два утверждения: одно истинное и одно ложное.

Первый: «Сумма наших возрастов нечетная. Мой возраст четный.»

Второй: «Только у одного из нас нечетный возраст. Произведение наших возрастов равно 810.»

Третий: «Произведение наших возрастов нечетное. Мой возраст нечетный.»

Четвертый: «Мы высказали наши утверждения в порядке возрастания возраста. Мы высказали наши утверждения в порядке убывания возраста.»

Сколько лет каждому из детей, если среди них нет ровесников? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет. (Г.Ю. Караваев)

*Ответ.* Первому 9 лет, второму 6 лет, третьему 5 лет, четвертому 3 года.

*Решение.* Начнем с двух утверждений третьего ребенка. Заметим, что если первое его утверждение верно, (произведение всех возрастов нечетное), то всем детям нечетное число лет, поэтому и второе его утверждение верно, что невозможно. Значит, произведение возрастов четно, а третьему ребенку нечетное число лет.

Теперь посмотрим на утверждения первого ребенка. В силу того, что ровно одно из двух сказанных им утверждений ложно, либо ему четное число лет и сумма возрастов всех детей четна, либо ему нечетное число лет и сумма возрастов всех остальных детей нечетна. В любом случае сумма возрастов второго, третьего и четвертого детей четная. Так как возраст третьего ребенка нечетный, либо у второго, либо у четвертого ребенка возраст нечетный.

Тогда первое утверждение второго ребенка неверно, откуда произведение возрастов всех детей равно 810. Разложим это число на простые множители:  $810 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$ . Заметим, что возраст ребенка, кратный 5, не может делиться еще и на 3, так как тогда он будет не менее 15. Значит, возраст одного из детей делится на 9. Но единственное число, кратное 9 и не превышающее 12, равно 9. Из этого следует, что одному из детей 9 лет.

Заметим, что у остальных детей возрасты не будут делиться на 9, а значит, у двоих детей возрасты будут делиться на 3. Так как среди детей нет ровесников, а также исходя из того, что эти возрасты не будут кратны 5, один из возрастов окажется равен 3, а другой — равен 6. Возраст оставшегося ребенка будет равен 5.

Исходя из утверждений четвертого ребенка, возрасты детей либо убывают, либо возрастают, поэтому третьему ребенку либо 5, либо 6 лет. Мы знаем, что возраст третьего ребенка нечетный, поэтому ему 5 лет, а возрасты убывают.

Тогда первому ребенку 9 лет, второму 6 лет, третьему 5 лет, а четвертому 3 года.

*Критерии.* Максимальный балл: 16.

| Содержание критерия                                                                                                                                           | Балл |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Верное решение                                                                                                                                                | 16   |
| Доказано, что произведение возрастов детей равно 810<br><i>Или</i><br>Из предположения, что произведение возрастов равно 810, сделаны выводы о возрасте детей | 10   |
| Только ответ в правильном порядке без пояснений                                                                                                               | 2    |
| Решение не соответствует ни одному из критериев выше                                                                                                          | 0    |

**7.4.** У бизнесмена есть 4 чемодана, которые весят 12 кг, 13 кг, 24 кг и 29 кг. Он находится на первом этаже небоскреба и хочет подняться вместе со всеми чемоданами на верхний этаж. Лифт сломался и едет вверх или вниз, только если суммарный вес пассажиров и их вещей в килограммах делится нацело на 5 или на 7. Сможет ли бизнесмен подняться наверх вместе со всеми чемоданами, если он весит 73 кг? Он может совершить несколько поездок на лифте и оставлять чемоданы на первом и на верхнем этажах, но не может пользоваться помощью других людей, а также использовать посторонние предметы. (Г.Ю. Караваев)

*Ответ.* Сможет.

*Решение.* Опишем одну из подходящих стратегий с помощью схемы. Слева будем писать, какие чемоданы находятся на первом этаже, стрелкой обозначать чемоданы в лифте, а справа подпишем чемоданы на верхнем этаже.

$$\begin{array}{rcl}
 24, 29 & \xrightarrow{12, 13} & \\
 24, 29 & \xleftarrow{12} & 13 \\
 12 & \xrightarrow{24, 29} & 13 \\
 12 & \xleftarrow{13, 24} & 29 \\
 24 & \xrightarrow{12, 13} & 29 \\
 24 & \xleftarrow{13, 29} & 12 \\
 13 & \xrightarrow{24, 29} & 12 \\
 13 & \xleftarrow{12} & 24, 29 \\
 & \xrightarrow{12, 13} & 24, 29
 \end{array}$$

Нетрудно проверить, что на каждом шаге суммарный вес бизнесмена и перевозимых им чемоданов кратен 5 или 7.

*Критерии.* Максимальный балл: 17.

| Содержание критерия                                                                  | Балл |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Верное решение                                                                       | 17   |
| Рассмотрены все комбинации, позволяющие подняться и спуститься, иных продвижений нет | 10   |
| Только правильный ответ без пояснений                                                | 0    |
| Решение не соответствует ни одному из критериев выше                                 | 0    |

**7.5.** В магазине продаются 9 разных чашек трех цветов (красные, оранжевые, фиолетовые) с тремя узорами (в горошек, в полосочку и в клеточку). Все чашки стоят целое число монет от 1 до 9, причем все цены попарно различны.

Известно, что все не красные чашки не в горошек суммарно стоят 25 монет, все не оранжевые чашки не в полосочку стоят 22 монеты, а все не фиолетовые чашки не в клеточку стоят 21 монету. Также известно, что красная чашка в горошек стоит дешевле, чем фиолетовая в полосочку. Сколько может стоить оранжевая чашка в клеточку? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (Г.Ю. Каравачев)

*Решение.* Сложив суммарные стоимости не красных чашек не в горошек, не оранжевых чашек не в полосочку и не фиолетовых чашек не в клеточку, получим  $25 + 22 + 21 = 68$  монет. Заметим, что стоимости красной чашки в горошек, оранжевой чашки в полосочку и фиолетовой чашки в клеточку вошли в сумму дважды, а стоимости всех остальных чашек — один раз. Вычтем из 68 монет суммарную стоимость всех чашек, равную  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$  монетам и получим, что красная чашка в горошек, оранжевая в полосочку и фиолетовая в клеточку суммарно стоят  $68 - 45 = 23$  монеты. Также заметим, что три самые дорогие чашки стоят суммарно  $7 + 8 + 9 = 24$  монеты, а значит, красная чашка в горошек, оранжевая в полосочку и фиолетовая в клеточку стоят 6, 8 и 9 монет (в некотором порядке). Мы знаем, что красная чашка в горошек которая стоит 6, 8 или 9 монет, стоит дешевле, чем фиолетовая в полосочку, которая стоит 1, 2, 3, 4, 5 или 7 монет. Понятно, что такое возможно лишь если красная чашка стоит 6 монет, а фиолетовая в полосочку — 7. Не красные чашки не в полосочку суммарно стоят 25 монет, фиолетовая в полосочку — 7 монет, оранжевая в полосочку и фиолетовая в клеточку — 8 и 9 монет (в некотором порядке), а значит, оранжевая чашка в клеточку стоит  $25 - 7 - 8 - 9 = 1$  монету.

*Критерии.* Максимальный балл: 20.

| Содержание критерия                                                                                                                   | Балл |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Верное решение                                                                                                                        | 20   |
| Доказано, что красная чашка в полоску стоит 6 монет, а оранжевая в полосочку и фиолетовая в клеточку — 8 и 9 монет в каком-то порядке | 16   |
| Доказано, что красная чашка в полосочку, оранжевая в полосочку и фиолетовая в клеточку стоят 6, 8 и 9 монет в каком-то порядке        | 12   |
| Только правильный ответ без пояснений                                                                                                 | 1    |
| Решение не соответствует ни одному из критериев выше                                                                                  | 0    |

**7.6.** Некоторые клетки квадрата  $n \times n$  покрасили в красный цвет, при этом в каждой строке и в каждом столбце покрашено ровно 100 клеток. Известно, что никакие две красные клетки не касаются друг друга сторонами или углами. При каком наименьшем  $n$  такое могло произойти? (Г.Ю. Караваев)

*Ответ.* При  $n = 400$ .

*Решение. Оценка.* Отметим все узлы квадрата  $n \times n$  (узлы — вершины квадратиков  $1 \times 1$ ). Заметим, что если никакие две красные клетки не касаются друг друга сторонами и углами, все уголки красных клеточек являются различными узлами. Посмотрим на первую и вторую строки квадрата. Заметим, что на отрезке, отделяющем первую строку от второй, всего  $n + 1$  узел. С другой стороны, 200 узлов на этом отрезке будут нижними углами красных квадратиков верхней строки, а 200 — верхними углами квадратиков второй строки. Значит,  $n + 1 \geq 400$ .

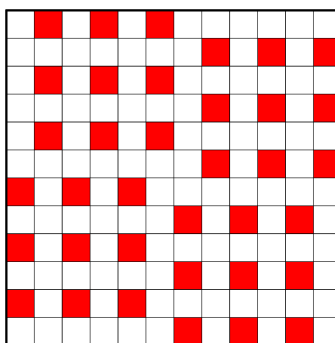
Предположим, что  $n = 399$ . Тогда для каждого  $k < 399$  на отрезке, отделяющем строку  $k$  от строки  $k + 1$ , все узлы будут углами красных квадратиков. В частности, самый левый узел каждого из этих отрезков будет углом красного квадрата. Но тогда как минимум 398 узлов левой стороны квадрата будут углами красных клеток, а это возможно только если в первом столбце будет хотя бы 199 красных клеток. Значит,  $n > 399$ .

*Пример.* Покажем, как покрасить клетки квадрата  $400 \times 400$  так, чтобы условие выполнялось.

Разделим квадрат  $400 \times 400$  на 4 *больших* квадрата  $200 \times 200$ . Каждый из больших квадратов разрежем на 10000 *малых* квадратов размера  $2 \times 2$ . Теперь покрасим в красный цвет некоторые клетки больших квадратов следующим образом:

- 1) В левом верхнем большом квадрате закрасим правую верхнюю клетку каждого малого квадрата.
- 2) В правом верхнем большом квадрате закрасим правую нижнюю клетку каждого малого квадрата.
- 3) В левом нижнем большом квадрате закрасим левую верхнюю клетку каждого малого квадрата.
- 4) В правом нижнем большом квадрате закрасим левую нижнюю клетку каждого малого квадрата.

Ниже — пример для поля  $12 \times 12$  и 3 красных клеток в каждой строке и каждом столбце.



Легко видеть, что для данной раскраски все условия выполняются, а значит, искомое  $n$  равно 400.

Критерии. Максимальный балл: 22.

| Содержание критерия                                                                                                                | Балл |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Приведен верный пример и полностью доказана верная оценка                                                                          | 22   |
| Приведен верный пример и оценка на $n \geq 398$ , случай $n = 399$ не разобран или разобран ошибочно                               | 17   |
| Полностью доказана оценка на $n \geq 400$ , пример на 400 отсутствует или ошибочен                                                 | 16   |
| Приведен верный пример на $n = 400$ , в доказательстве оценке нет продвижений                                                      | 10   |
| Присутствует только доказательство оценки на $n \geq 399$ , случай $n = 399$ не разобран или разобран ошибочно, пример отсутствует | 8    |
| Только пример на $n = 500$                                                                                                         | 2    |
| Только правильный ответ без пояснений                                                                                              | 0    |
| Решение не соответствует ни одному из критериев выше                                                                               | 0    |

Критерий примера на  $n = 500$  не суммируется с критерием оценки без примера.