

Всероссийская олимпиада школьников «Высшая проба»
2026 год
2 этап

Решения задач
Математика, 8 класс

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8.1. В игре «Тактика онлайн» за каждую победу игроку начисляют 15 очков, за ничью — 8 очков, а за каждое поражение снимают 12 очков. За какое наименьшее количество игр Вася мог набрать 104 очка? (М.В. Алексеев, Г.Ю. Караваев)

Ответ. За 11 игр.

Решение. Оценка. Обозначим за n число игр, а за w, d, ℓ — количество побед, ничьих и поражений, соответственно ($n = w + d + \ell$). Тогда $15w + 8d - 12\ell = 104$. Так как $w = n - d - \ell$, равенство можно переписать как $15n - 104 = 7d + 27\ell$ — правая часть показывает потери относительно случая, когда все игры являются победами. Сразу видно, что $n \geq 7$, так как при $n \leq 6$ Вася набрал бы не более 90 очков. Теперь запишем следствия из этого равенства:

1) Количество ничьих не равно нулю, так как разность $15n - 27\ell$ делится на 3, а 104 — не делится.

2) Количество побед должно делиться на 4, так как $12\ell - 8d + 104$ всегда делится на 4, а 15 — не делится.

3) В случае отсутствия побед $n \geq 104/8 = 13$.

4) В случае отсутствия поражений число $15n$ дает остаток 6 при делении на 7, т.е. само n дает остаток 6 при делении на 7. С учетом того, что $n \geq 7$, это возможно только при $n \geq 13$.

5) Пусть присутствовали и победы, и поражения, и ничьи. Тогда $15n - 104 \geq 35$, откуда $n \geq 10$. Проверим случай $n = 10$. Из пункта 2) мы знаем, что количество побед кратно 4, поэтому их могло быть 4 или 8. В случае 4 побед нельзя набрать больше $150 - 7 \cdot 5 - 27 \cdot 1 = 88$ очков, поэтому этот случай невозможен. Если же было 8 побед, то возможен только вариант с одной ничьей и одним поражением, а тогда число набранных очков равно $150 - 7 - 27 = 116$. Таким образом, в случае наличия всех трех исходов ровно 10 игр быть не могло, и в этом случае $n \geq 11$.

Видно, что во всех случаях количество игр не могло быть меньше 11.

Пример. Покажем, что ровно 11 игр быть могло. Пусть было 8 побед, одна ничья и два поражения. Тогда количество набранных очков равно $15 \cdot 8 + 8 \cdot 1 - 12 \cdot 2 = 128 - 24 = 104$, как и требовалось.

Критерии. Максимальный балл: 13.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	13
Приведен верный пример и есть небольшие недочеты в доказательстве оценки на уровне одного неразобранного случая n	10
Показано, что количество побед делится на 4 <i>Или</i> Оценка доказывалась использованием жадного алгоритма без обоснований его оптимальности <i>Или</i> Присутствуют иные нетривиальные полезные продвижения на количество побед, ничьих и поражений <i>Или</i> Приведен верный пример на 11 игр	4
Показано, что $7 \leq n \leq 13$	2
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

Баллы за разные критерии не суммируются.

8.2. По кругу сидят 100 гномов, перед каждым лежит четное число кристаллов. Если бы каждый гном отдал половину своих кристаллов соседу справа, то у 64 гномов кристаллов стало бы больше, а у всех остальных — меньше. У какого наибольшего количества гномов может стать больше кристаллов, чем было, если каждый отдаст половину своих кристаллов соседу слева? Ответ обоснуйте. (Г.Ю. Караваев)

Ответ. У 36 гномов.

Решение. Рассмотрим двух сидящих рядом гномов, назовем их А и Б. Пусть А отдаст Б половину своих кристаллов, а Б отдаст половину кристаллов кому-то еще. Нетрудно видеть, что если у А больше кристаллов, чем у Б, то Б получит больше кристаллов, чем отдаст, а значит, общее количество кристаллов у него увеличится. Аналогично, если у А меньше кристаллов, чем у Б, то у Б уменьшится количество кристаллов, а если кристаллов у А и Б поровну, то количество кристаллов у Б не изменится.

По условию количество кристаллов у всех гномов изменилось, а значит, у любых двух гномов, сидящих рядом, не поровну кристаллов.

Выдадим каждому гному красный значок, если у него больше кристаллов, чем у соседа справа, иначе выдадим ему синий значок. Каждому гному достанется по одному значку, а значит, значков всего 100.

Пусть каждый гном с красным значком отдаст свой значок соседу справа.

Теперь легко проверить, что если каждый гном отдаст половину кристаллов соседу справа, то больше кристаллов станет только у обладателей красных значков. Таких гномов по условию 64, а значит, красных значков 64, а синих — 36.

Теперь заметим, что если каждый гном отдаст половину кристаллов соседу слева, то количество кристаллов увеличится только у владельцев синих значков, а их, как мы знаем, 36.

Критерии. Максимальный балл: 13.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	13
Арифметическая ошибка в самом конце решения, остальное рассуждение полностью верно и обосновано	12
Вывод, что если после передачи от соседа у гнома стало больше, то у соседа было изначально больше, чем у этого гнома, не обоснован и принят за очевидный, остальное решение верно и ответ верен	10
Вывод, что если после передачи от соседа у гнома стало больше, то у соседа было изначально больше, чем у этого гнома, обоснован, дальнейшее решение ошибочно и ответ неверен <i>Или</i> Рассмотрен только частный случай и получен верный ответ	5
Рассмотрен только частный случай, но полученный ответ неверный	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

Баллы за разные критерии не суммируются.

8.3. В треугольнике ABC точка D — середина AB , а точка E — середина AC . На стороне AC выбрана точка F такая, что $AF = 2FC$. Известно, что DF — биссектриса угла $\angle CDE$, $\angle B = 60^\circ$. Найдите угол $\angle BAC$.
(Г.Ю. Караваев)

Ответ. 30° .

Решение. Отметим на луче BC точку B' такую, что $BC = B'C$. Отметим середину D' отрезка AB' . Заметим, что DD' — средняя линия треугольника ABB' , а DE — средняя линия треугольника ABC . Тогда $DD' \parallel BC \parallel DE$, а значит, E лежит на отрезке DD' . Также заметим, что $DE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{4}BB' = \frac{1}{2}DD'$. С другой стороны, $EF = AF - AE = \frac{2}{3}AC - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{6}AC = \frac{1}{2}FC$, а значит, в силу того, что DF — биссектриса треугольника CDE , $CD = 2DE = DD'$.

Но CD и DD' — средние линии ABB' , а значит, $AB' = 2CD = DD' = BB'$, откуда $\angle BAB' = \angle ABB' = 60^\circ$. Тогда, так как сумма углов треугольника равна 180° , угол $\angle AB'B = 60^\circ$, а треугольник ABB' — равносторонний. В равностороннем треугольнике медиана AC является и биссектрисой, откуда $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAB' = 30^\circ$.

Критерии. Максимальный балл: 16.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	16
Получен верный обоснованный ответ, имеются мелкие арифметические ошибки в промежуточных вычислениях, либо присутствуют некоторые верные необоснованные моменты, но в остальном доказательство верно	14
Получен верный ответ, но обоснования нет или оно неверное	7
Ответ не верный, присутствуют некоторые продвижения (использование подобия, построение параллелограмма и т.п.)	5
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

Баллы за разные критерии не суммируются.

8.4. В цирке работают 10 силачей, у которых есть 10 разных гирь. Каждый силач может поднять любую гирю не тяжелее определенного веса (и для каждого силача этот вес свой). Для номера нужно каждому силачу выдать по гире, которую он сможет поднять. Могло ли оказаться так, что есть ровно 3000 способов осуществить требуемое? (Г.Ю. Караванов)

Ответ. Могло.

Решение. Пусть гири весят 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13 и 15 кг, а силачи могут поднять до 2, 4, 6, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20 кг соответственно. Пронумеруем силачей в порядке возрастания силы, а гири — в порядке возрастания массы. Начнем распределять гири между силачами в порядке возрастания их силы.

Для начала заметим, что первый силач может поднять только первую гирю, поэтому сразу отдадим ему эту гирю. Из оставшихся гирь второй силач может поднять только вторую гирю, поэтому отдадим эту гирю второму силачу. Теперь третьему силачу по той же причине гарантированно достанется третья гиря. Теперь рассмотрим четвертого силача. Он может поднять все гири, кроме двух последних, поэтому мы можем выдать ему любую из оставшихся пяти гирь. Пятый силач может поднять любую гирю, кроме самой тяжелой, а значит, вне зависимости от того, какую гирю мы выдали четвертому силачу, у нас есть ровно 5 способов выдать одну из гирь пятому силачу. Оставшиеся 5 силачей могут поднять все гири, поэтому есть ровно $5! = 120$ способов раздать им 5 оставшихся гирь вне зависимости от того, какие именно 5 гирь остались.

Итого получаем $5 \cdot 5 \cdot 120 = 3000$ способов, что и требовалось.

Критерии. Максимальный балл: 16.

Содержание критерия	Балл
Верно посчитано количество способов раздать гири силачам (не требуется приводить пример)	16
Получен верный ответ, но: в примере не учтено, что массы гирь должны быть различны <i>Или</i> В примере не учтено, что силы каждого силача должны быть различны	14
Присутствует разложение числа 3000 на множители <i>Или</i> Присутствует идея упорядоченности сил силачей и весов гирь <i>Или</i> Присутствует примерная идея подсчета после упорядочивания	2
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

Баллы за критерии на 2 балла суммируются (до 6 максимум).

8.5. В лаборатории тестируют два одинаковых телефона. Каждый телефон в течение часа равномерно заряжается от 0% до 100%, после чего его тут же отключают от зарядки. В течение двух часов телефон равномерно разряжается до 20%, после чего он переходит в режим энергосбережения и равномерно разряжается до 0% в течение еще одного часа. Как только телефон разряжается полностью, его снова ставят на зарядку, и цикл повторяется. Час назад суммарный заряд обоих телефонов составлял 135%, полчаса назад он составлял 116%, а сейчас он равен 81%. Каким будет суммарный заряд телефонов через полтора часа?

(Г.Ю. Караваев)

Ответ. 88%.

Решение. Телефон в течение тестирования находится в трех различных состояниях: зарядки, разрядки и энергосбережения.

1) Если телефон в течение получаса находится в одном состоянии, его уровень заряда изменится на величину, кратную 10%.

2) В течение позапрошлого получаса суммарное изменение заряда телефонов составило не кратную 10% величину, в течение прошлого — тоже. Любое состояние телефона длится не менее часа, а значит, телефон не может за один час поменять состояние дважды. Это значит, что в течение прошлого получаса и позапрошлого получаса состояние изменилось у разных телефонов. Иными словами, час назад одному из телефонов оставалось меньше получаса до изменения состояния (назовем его первым), а другому — от получаса до часа (назовем его вторым). Заметим, что если телефон не заряжается и ему остается менее часа до смены состояния, то его заряд составляет менее 60%. Также заметим, что если телефон заряжается, и до смены состояния ему остается от получаса до часа, то его заряд менее 50%. Значит, если первый телефон час назад не находился на зарядке, то суммарный заряд телефонов не мог превысить $60\% + 60\% = 120\% < 135\%$. Получаем, что час назад первый телефон находился на зарядке.

3) Рассмотрим второй телефон. Если бы он час назад находился в режиме энергосбережения, его заряд не превышал бы 20%, а суммарный заряд телефонов никак не мог бы равняться 135%. С другой стороны, если второй телефон час назад находился бы на зарядке, его заряд за полчаса увеличился бы на 50%, в то время как заряд первого телефона мог либо увеличиться, либо не измениться, либо уменьшиться не более, чем на 20%. Тогда суммарный заряд телефонов увеличился бы за позапрошлые полчаса, что неверно.

Получаем, что первый телефон час назад находился на зарядке, а второй — разряжался, полчаса назад первый телефон уже разряжался, второй тоже продолжал разряжаться, а в текущий момент второй телефон уже находится в режиме энергосбережения.

Теперь заметим, что за прошлые полчаса второй телефон разрядился на 20% (так как не перешел в режим энергосбережения), а суммарный заряд телефонов уменьшился на $135\% - 116\% = 19\%$. Значит, заряд первого телефона за эти полчаса увеличился на 1%. Пусть в течение этого получаса первый телефон заряжался x часов. Тогда изменение его заряда составило $(100x - 40(0.5 - x))\% = (140x - 20)\% = 1\%$, откуда $140x = 21 \iff x = 3/20$. Раз час назад телефону до полной зарядки не хватало $3/20$ часа, его заряд составлял 85%. Тогда заряд второго телефона в этот момент составлял 50%.

Получаем, что первый телефон полностью зарядился 51 минуту назад, а второй телефон полностью разрядится через 45 минут. Первый телефон перейдет в режим энергосбережения через 2 часа разрядки, то есть спустя час и 9 минут от текущего момента и за 21 минуту разрядится от 20% до 13%. Второй телефон за 45 минут зарядки зарядится до 75%, а значит, суммарный заряд телефонов через полтора часа составит 88%.

Критерии. Максимальный балл: 20.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	20
В решении при расчетах допущена арифметическая ошибка <i>Или</i> Дан ответ не на вопрос из условия, но все остальное верно <i>Или</i> Другие незначительные недочеты в решении	19
Обоснование начальной конфигурации верно, вычисления не закончены или в конце неверны. Ход решения верный, доказательство верное.	16
Небольшие неточности в доказательстве, но ответ получен верно или неверно из-за арифметической ошибки. Например, не обоснованно, почему второй телефон мог потерять 15% в разрядке в разных режимах.	12
Не сказано или не обосновано, почему 1 час назад один телефон заряжался, а второй разряжался, но остальное верно, и получен верный ответ <i>или</i> верно с обоснованием составлено уравнение (даже неявно) и найдено, что $x = 9$ мин или $x = 15$ мин (в зависимости от промежутка, про который речь), но ответа нет или ответ ошибочный	8
Подобран верный пример без обоснований <i>Или</i> Не сказано, почему 1 час назад один телефон заряжался, а второй разряжался и верно найдено $x = 9$ ($x = 15$), а потом ошибка, или расчеты не доведены до конца	8
Исключены логически какие-то ситуации (например, сказано, что в начале оба телефона не могли быть в режиме энергосбережения) <i>или</i> приведен верный вывод, что один телефон в начале разряжался, а второй заряжался, но дальнейших продвижений нет	5
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

Баллы за разные критерии не суммируются.

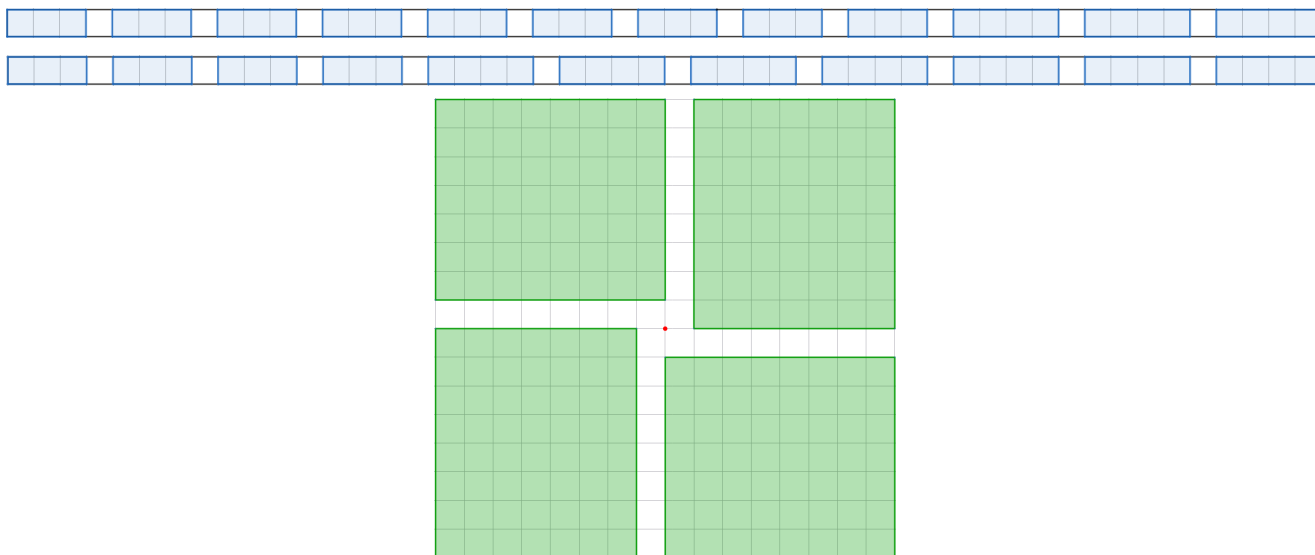
8.6. У Миши есть клетчатая доска 100×100 и 500 полных наборов кораблей для игры в морской бой (каждый набор содержит один корабль в виде прямоугольника 1×4 , два 1×3 , три 1×2 и четыре 1×1). Он хочет разместить корабли из этих наборов на доске по правилам морского боя (никакие два различных корабля не соприкасаются стороной или углом) таким образом, чтобы суммарное число клеток, покрытых кораблями, было наибольшим. Какое наибольшее количество клеток сможет покрыть Миша? (М.В. Алексеев, Г.Ю. Караванов)

Ответ. 3950 клеток.

Решение. Оценка. Заметим, что у доски 100×100 всего $101^2 = 10201$ узлов (вершин клеток). Также заметим, что раз корабли не касаются друг друга даже углами, каждый узел покрыт не более, чем 1 кораблем. В силу того, что каждый корабль накрывает четное число узлов, всего будет покрыто не более 10200 узлов.

Предположим, что корабли размещены на доске по правилам. Запишем по числу в каждый из узлов: 0 в каждый узел, не накрытый никаким кораблем, $\frac{1}{4}$ в каждый узел одноклеточного корабля, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ в каждый узел двуклеточного корабля, $\frac{3}{8}$ в каждый узел трехклеточного корабля, $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ в каждый узел четырехклеточного корабля. Нетрудно видеть, что сумма чисел в узлах равна общему количеству клеток, покрытых кораблями. Как уже было показано выше, по крайней мере 1 узел будет содержать ноль. Четырехклеточных кораблей у нас всего 500, поэтому не более чем в 5000 узлов будет записано число $\frac{2}{5}$, а в оставшиеся узлы будет записано число, не превышающее $\frac{3}{8}$. Так как $\frac{3}{8} < \frac{2}{5}$, сумма всех чисел не превысит $5000 \cdot \frac{2}{5} + (10200 - 5000) \cdot \frac{3}{8} = 3950$, а значит, всего будет покрыто не более 3950 клеток.

Пример. Покажем, что можно покрыть ровно 3950 клеток пользуясь таким набором. Разрежем полосу 1×50 на 9 трехклеточных кораблей и на 3 четырехклеточных корабля, после чего послойно составим из 25 таких полосок прямоугольник 49×50 и изготовим два таких прямоугольника. Аналогично, разрежем полосу 1×50 на 4 трехклеточных корабля и на 7 четырехклеточных кораблей, после чего послойно составим из 25 таких полосок прямоугольник 49×50 и изготовим два таких прямоугольника. Разместим 4 этих прямоугольника «спиралью» вокруг одного центрального узла в квадрате 100×100 — тогда все узлы, кроме центрального, будут заняты, всего будет ровно 650 трехклеточных кораблей и ровно 500 четырехклеточных кораблей, то есть, покрыто ровно 3950 клеток. (Ниже показаны полоски, из которых нужно составить прямоугольники 49×50 и показан пример аналогичной «спирали» из прямоугольников 7×8 в квадрате 16×16 ; покрыты все узлы, кроме центрального, отмеченного красным).



Критерии. Максимальный балл: 22.

Содержание критерия	Балл
Верная оценка на 3950 и корректный пример на 3950 клеток	22
О1. Только верная оценка на 3950 клеток	12
О2. Оценка с ошибкой, в том числе, оценка, не доведенная до конца, но с верной идеей	6
П1. Пример на 3950 клеток	12
П2. Пример на не менее чем 3940 и не более чем 3949 клеток	5
П3. Пример на не менее чем 3851 и не более чем 3939 клеток	3
П4. Пример на 3850 клеток	2
П5. Пример на менее чем 3850 клеток	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

Баллы за критерии с литерой П суммируются с критериями с литерой О, но не более чем на 22 балла. Баллы за критерии с одной литерой не суммируются.