

Всероссийская олимпиада школьников «Высшая проба»
2026 год
2 этап

Решения задач
Математика, 9 класс

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

9.1. В игре «Тактика онлайн» у каждого игрока есть рейтинг: это отношение числа побед игрока к общему числу сыгранных им игр, посчитанное в процентах и округленное до ближайшего целого числа, не превосходящего полученной величины в процентах. До сегодняшнего дня Вася сыграл несколько игр, а сегодня он победил в четырех играх и проиграл в одной, после чего его рейтинг возрос. Какой максимальный рейтинг мог быть у Васи до сегодняшнего дня? (М.В. Алексеев)

Ответ. 78.

Решение. Оценка. Пусть до сегодняшнего дня Вася сыграл n игр, из которых было w побед. Назовем чистым рейтингом отношение числа побед игрока к числу сыгранных им игр (без округления и пересчета в процентах): $r = \frac{w}{n}$. Заметим, что если рейтинг игрока вырос, то и его чистый рейтинг тоже вырос. После сегодняшних четырех побед и одного поражения чистый рейтинг Васи стал равен $\frac{w+4}{n+5}$. Как известно, если a, b, c, d — положительные числа

и $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, поэтому, чистый рейтинг Васи был строго меньше $\frac{4}{5}$, при этом,

после сегодняшних игр он так же не мог стать больше либо равным $\frac{4}{5}$. Отсюда следует, что и рейтинг Васи не мог стать больше 79 (так как рейтинг 80 и выше соответствовал бы чистому рейтингу не меньше $4/5$), а значит, рейтинг Васи до вчерашнего дня не мог превышать 78.

Пример. Покажем, что такой рейтинг у Васи быть мог. Пусть до этого было 19 игр и 15 побед. Тогда его чистый рейтинг равен $\frac{15}{19}$. Покажем, что $0.78 < \frac{15}{19} < 0.79$. Это эквива-

лентно тому, чтобы показать, что $0.21 < \frac{4}{19} < 0.22$. Сравним $\frac{4}{19}$ с $\frac{21}{100}$ и $\frac{4}{19}$ с $\frac{22}{100}$. Так как $19 \cdot 21 < 4 \cdot 100$, то $\frac{21}{100} < \frac{4}{19}$. Аналогично, $19 \cdot 22 > 4 \cdot 100$, поэтому, $\frac{22}{100} > \frac{4}{19}$. Отсюда следует, что $0.78 < \frac{15}{19} < 0.79$, то есть, рейтинг Васи был равен 78. После сегодняшних игр

он стал равен $\frac{19}{24}$. Тем же методом сравним $\frac{5}{24}$ с 0.21: так как $21 \cdot 24 > 500$, то и $0.21 > \frac{5}{24}$, а значит, $\frac{19}{24} > 0.79$. Таким образом, рейтинг Васи стал не меньше 79, как и требовалось (на самом деле, он стал равен ровно 79, так как не мог стать 80).

Критерии. Максимальный балл: 13.

Содержание критерия	Балл
Доказана оценка и приведен корректный пример	13
Доказательство оценки на 78	8
Только пример на 78	5
Только оценка на 79, не доведенная до оценки на 78	4
Задача решалась без округления рейтинга	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

9.2. Числа a, b, c являются длинами сторон остроугольного треугольника. Докажите неравенство $a^3 + b^3 + abc > c^3$.
(М.В. Алексеев)

Решение. Будем считать, что c превосходит a и b (иначе неравенство тривиально). Преобразуем левую часть: $a^3 + b^3 + abc = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + abc > c(a^2 + b^2 - ab) + abc$, так как в треугольнике $a+b > c$. Кроме того, $c(a^2 + b^2 - ab) + abc > c(c^2 - ab) + abc$, так как в остроугольном треугольнике $a^2 + b^2 > c^2$. Последнее выражение равно $c(c^2 - ab) + abc = c^3 - abc + abc = c^3$. Неравенство доказано.

Критерии. Максимальный балл: 13.

Содержание критерия	Балл
Верное доказательство	13
Задача решена только в предположении, когда c — наибольшая сторона, но это предположение не отмечено явно	12
Написано неравенство треугольника и неравенство $a^2 + b^2 + c^2$ и есть попытки их использования, не приведшие к доказательству	2
Написано неравенство треугольника и неравенство $a^2 + b^2 + c^2$, попытки их использования отсутствуют	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

9.3. Дан прямоугольный треугольник ABC , в котором $\angle B = 90^\circ$. На стороне AB отметили точку D , а на стороне BC — точку E так, что прямая AC параллельна прямой DE , расстояние между прямыми AC и DE равно 1, а длина DE равна 1. Обязательно ли отрезок биссектрисы угла B , лежащий внутри треугольника ABC , имеет длину больше $\sqrt{2}$?
(Г.Ю. Караваев)

Ответ. Обязательно.

Решение. Впишем окружность радиуса 1 в угол $\angle ABC$ с центром в точке O . Обозначим точку касания этой окружности и луча BA за A' , точку касания этой окружности и луча BC — за C' .

Проведем касательную ℓ к окружности, параллельную AC (ближайшую из двух к точке B) и обозначим точку пересечения ℓ с AB за D' , точку пересечения ℓ с BC — за E' , а точку касания окружности и отрезка $D'E'$ — за F' .

Нетрудно видеть, что $A'OC'B$ — квадрат со стороной 1 (это прямоугольник с двумя равными смежными сторонами). Заметим, что $D'E' = D'F' + F'E' = \frac{1}{2}(A'D' + D'F') + \frac{1}{2}(F'E' + E'C') = \frac{1}{2}(A'D' + D'E' + E'C') < \frac{1}{2}(A'D' + D'B + BE' + E'C') = \frac{1}{2}(A'B + BC') = 1$, а значит, отрезок $D'E'$ лежит ближе к точке B , чем отрезок DE . Точка O лежит на расстоянии 1 от $D'E'$, а значит, она лежит строго внутри треугольника ABC . С другой стороны, точка O лежит на биссектрисе из угла $\angle ABC$, на расстоянии $\sqrt{2}$ от точки B , а значит, биссектриса будет строго длиннее $\sqrt{2}$.

Критерии. Максимальный балл: 17.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	17
При решении с использованием перпендикуляров DF и EG к стороне AC рассмотрены оба подобия: CBK и CFE , ABK и AGD , где K — основание биссектрисы угла B	7
При решении с использованием перпендикуляров DF и EG к стороне AC доказано, что центр O образовавшегося квадрата лежит на биссектрисе угла ABC <i>Или</i> Доказана вписанность $BEOD$	3
При решении с использованием перпендикуляров DF и EG к стороне AC рассмотрено одно из подобий: CBK и CFE , ABK и AGD , где K — основание биссектрисы угла B	2
Рассмотрен только частный случай равнобедренного треугольника	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

9.4. В цирке работают 10 силачей, у которых есть 10 разных гирь. Каждый силач может поднять любую гирю не тяжелее определенного веса (и для каждого силача этот вес свой). Для номера нужно каждому силачу выдать по гире, которую он сможет поднять. Могло ли оказаться так, что есть ровно 6048 способов осуществить требуемое? (Г.Ю. Каравачев)

Ответ. Не могло.

Решение. Пронумеруем силачей в порядке возрастания их силы. Пусть первый силач может поднять a_1 самых легких гирь, второй — a_2 самых легких гирь, и так далее.

Начнем раздавать гири силачам, начиная с первого. Легко видеть, что первому силачу можно выдать гирю a_1 способами. Второму силачу может поднять все гири, которые может поднять первый, а значит, вне зависимости от того, какую гирю мы дали первому силачу, есть $a_2 - 1$ способов выдать гирю второму силачу. Для остальных силачей будем рассуждать таким же образом: k -тому силачу можно выдать гирю $a_k - k + 1$ способами. Если в какой-то момент это число оказалось равным нулю или отрицательным, то гири раздать не получится, так как k первых силачей могут поднять $a_k < k$ самых легких гирь, а значит, кому-то из них точно достанется гиря, которую он поднять не может.

Если же гири раздать удастся, то будет ровно $a_1 \cdot (a_2 - 1) \cdot \dots \cdot (a_{10} - 9)$ способов это сделать. Заметим, что $(a_{10} - 9) \leq 10 - 9 = 1$, а также что для любого k верно $(a_k - k + 1) - (a_{k-1} - k + 2) = a_k - 1 - a_{k-1} \geq -1$, то есть, каждый следующий член вышеуказанного произведения не более, чем на 1 меньше предыдущего. Заметим, что 6048 кратно 7, а значит, $(a_k - k + 1)$ равно 7 для некоторого k . Но тогда в произведении должны встретиться все меньшие натуральные числа, в том числе и 5. Но 6048 не делится на 5, поэтому ситуация, в которой существует ровно 6048 способов раздать гири, невозможна.

Критерии. Максимальный балл: 17.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	17
Силы силачей и веса гирь упорядочены по возрастанию, количество способов подсчитано через произведение $a_1 \cdot (a_2 - 1) \cdot \dots \cdot (a_{10} - 9)$, доказано, что каждый член произведения если и меньше предыдущего, то не более чем на 1 и замечено, что обязательно $a_k - k + 1 = 7$ для некоторого k , но дальнейший вывод отсутствует	14
Как в предыдущем критерии, но нет замечания о том, что $a_k - k + 1 = 7$, других продвижений нет	11
В верном решении не доказано, что каждый член произведения если и меньше предыдущего, то не более чем на 1	11
Присутствует обоснованная идея подсчета способов путем упорядочивания сил по возрастанию и вычисление произведения $a_1 \cdot (a_2 - 1) \cdot \dots \cdot (a_{10} - 9)$, других продвижений нет	7
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

9.5. Фокусник и его ассистент готовятся показать следующий фокус. У них есть 16 различных карточек четырех цветов. Карточек каждого цвета по четыре штуки; на карточках каждого цвета написаны натуральные числа от 1 до 4, причем числа на разных карточках одного цвета не повторяются. Зритель выбирает четыре карты так, чтобы все их цвета были разные, и все числа на них были разные, убирает их в конверт и заклеивает его. Ассистент выбирает из оставшихся карт две карты одного цвета и передает зрителю. Тот перетасовывает их как хочет и отдает фокуснику. Задача фокусника — отгадать карты, лежащие в конверте. Могут ли фокусник и ассистент договориться действовать так, чтобы фокус гарантированно удался? (Г.Ю. Караваев)

Ответ. Могут.

Решение. Назовем цвета буквами A, B, C, D . Пусть зритель выбрал карточку цвета A с числом a , карточку цвета B с числом b , карточку цвета C с числом c и карточку цвета D с числом d .

Сначала фокусник и ассистент договариваются о выборе цвета передаваемых двух карт в зависимости от взятых зрителем карт. Выберем цвет A , если $a < b$ и $c < d$, цвет B , если $a > b$ и $c < d$, цвет C , если $a < b$ и $c > d$, цвет D , если $a > b$ и $c > d$. Теперь, если был выбран цвет A или B , ассистент передает фокуснику карты со значениями c и d , иначе — карты со значениями a и b . Видно, что выбранные ассистентом карты отличаются от карт, которые выбрал зритель.

Опишем как фокусник восстанавливает карты, которые выбрал зритель. По числам на доставшихся ему картах и тому, достались ли ему карты цвета A или B , или же цвета C или D , фокусник может понять, какие числа были на выбранных зрителем карточках цветов A и B (но не какое из чисел было на каждой двух карт), а какие — на карточках цветов C и D . Затем, используя цвет пары карт, можно однозначно сопоставить числа на картах зрителя с цветами.

Критерии. Максимальный балл: 19.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	19
В переборном решении допущена незначительная ошибка в одном из случаев (на уровне опечатки)	15
В переборном решении допущена логическая ошибка	2
Посчитаны количества вариантов выбора ассистента и выбора зрителя	1
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

9.6. В лаборатории есть 100 пробирок. В одной из них — бесцветный химикат, а в остальных — вода. Требуется определить, в какой из пробирок находится химикат. Для этого можно приготовить несколько смесей жидкостей из пробирок и отправить на экспертизу, которая для каждой смеси покажет, содержится ли в ней хотя бы 11% химиката, или нет. Какое наименьшее количество смесей надо одновременно отправить на экспертизу, чтобы по ее результатам точно узнать, в какой из пробирок химикат? (Г.Ю. Караваев)

Ответ. 20.

Решение. Оценка. Заметим, что если некоторая смесь менее, чем на 11% состоит из содержимого одной из пробирок, результат будет одинаковым вне зависимости от того, был ли в соответствующей пробирке химикат. Значит, содержимое всех таких пробирок можно убрать из смеси, и результат это никак не изменит (так как процентное содержание содержимого каждой из пробирок только увеличится), а если содержимое любой из пробирок в смеси составляет менее 11%, то такую смесь можно вообще не отправлять на экспертизу, ведь результат для нее точно будет отрицательный.

Получаем, что если некоторый набор смесей позволяет определить, в какой из пробирок химикат, то найдется и такой набор, в котором в каждой смеси содержимое любой из пробирок составляет не менее 11% (а значит, в каждой смеси содержимое не более 9 пробирок), при этом тоже позволяющий определить, в какой из пробирок химикат. В связи с этим, в дальнейшем будем рассматривать только смеси, в которых есть содержимое не более 9 пробирок.

Пронумеруем смеси и для каждой пробирки запишем, в какие смеси вошло ее содержимое. Заметим, что для всех пробирок множество записанных номеров должно быть уникальным, ведь в противном случае результат экспертизы не сможет отличить пару пробирок с совпадающими множествами.

Пусть всего будет приготовлено n смесей. Тогда ни в одну смесь можно будет не добавлять только одну пробирку, добавить в одну смесь можно будет не более n , а остальные пробирки надо будет добавить хотя бы в две смеси. Таким образом, суммарное количество записанных номеров смесей для каждой из пробирок будет не менее $1 \cdot 0 + n \cdot 1 + (100 - n - 1) \cdot 2 = 198 - n$. С другой стороны, в каждой смеси есть жидкости из не более, чем 9 пробирок, поэтому записанных номеров будет не более $9n$. Получаем, что $198 - n \leq 9n \iff 10n \geq 198$, откуда смесей будет не менее 20.

Пример. Покажем, как обойтись ровно двадцатью смесями. Запишем номера всех ста пробирок в таблицу.

	1	2	3	4		5	6	7	8	9
10		11	12	13	14		15	16	17	18
19	20		21	22	23	24		25	26	27
28	29	30		31	32	33	34		35	36
37	38	39	40		41	42	43	44		45
	46	47	48	49		50	51	52	53	54
55		56	57	58	59		60	61	62	63
64	65		66	67	68	69		70	71	72
73	74	75		76	77	78	79		80	81
82	83	84	85		86	87	88	89		90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	

В первые 10 смесей включим содержимое первых 10 строк таблицы, в следующие 10 — содержимое первых 10 столбцов таблицы.

Если экспертиза покажет наличие химиката только в одной из первых 10 смесей, то искомая пробирка находится на пересечении строки, соответствующей смеси, для которой результат положительный, и последнего столбца. Если экспертиза покажет наличие химиката только в одной из смесей из второго десятка, то искомая пробирка находится на пересечении столбца, соответствующего этой смеси, и последней строки. Если же химикат окажется в двух смесях, то номер искомой пробирки будет находиться на пересечении строки и столбца, соответствующих смесям с положительным результатом.

Критерии. Максимальный балл: 21.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	21
П1. Приведен пример на 20	12
О1. Доказана оценка на 20	12
А1. Для каждой пробирки рассматриваются наборы смесей, в которых она участвует, после чего замечено, что для двух пробирок эти наборы должны быть различны	8
Б1. Замечено, что можно рассматривать только смеси из не более чем 9 пробирок	2
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

Баллы за критерии А1 и Б1 складываются. Баллы за оценку и пример складываются, но не более чем до 21 балла.