

Олимпиада «Высшая проба» проводится при поддержке Сбера, приветствуем участников соревнования! Поздравляем — ты являешься участником заключительного этапа олимпиады по направлению «Математика»! Сбер, как и ты, всегда стремится к амбициозным задачам и гениальным прорывам. Желаем тебе блистательной победы!



Время выполнения заданий — 240 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках.

Максимальный балл за всю работу равен 100.

9.1. (13) В игре «Тактика онлайн» у каждого игрока есть рейтинг: это отношение числа побед игрока к общему числу сыгранным им игр, посчитанное в процентах и округленное до ближайшего целого числа, не превосходящего полученной величины в процентах. До сегодняшнего дня Вася сыграл несколько игр, а сегодня он победил в четырех играх и проиграл в одной, после чего его рейтинг возрос. Какой максимальный рейтинг мог быть у Васи до сегодняшнего дня?

9.2. (13) Числа a, b, c являются длинами сторон остроугольного треугольника. Докажите неравенство $a^3 + b^3 + abc > c^3$.

9.3. (17) Дан прямоугольный треугольник ABC , в котором $\angle B = 90^\circ$. На стороне AB отметили точку D , а на стороне BC — точку E так, что прямая AC параллельна прямой DE , расстояние между прямыми AC и DE равно 1, а длина DE равна 1. Обязательно ли отрезок биссектрисы угла B , лежащий внутри треугольника ABC , имеет длину больше $\sqrt{2}$?

9.4. (17) В цирке работают 10 силачей, у которых есть 10 разных гирь. Каждый силач может поднять любую гирю не тяжелее определённого веса (и для каждого силача этот вес свой). Для номера нужно каждому силачу выдать по гире, которую он сможет поднять. Могло ли оказаться так, что есть ровно 6048 способов осуществить требуемое?

9.5. (19) Фокусник и его ассистент готовятся показать следующий фокус. У них есть 16 различных карточек четырёх цветов. Карточек каждого цвета по четыре штуки; на карточках каждого цвета написаны натуральные числа от 1 до 4, причём числа на разных карточках одного цвета не повторяются. Зритель выбирает четыре карты так, чтобы все их цвета были разные, и все числа на них были разные, убирает их в конверт и заклеивает его. Ассистент выбирает из оставшихся карт две карты одного цвета и передает зрителю. Тот перетасовывает их как хочет и отдает фокуснику. Задача фокусника — отгадать карты, лежащие в конверте. Могут ли фокусник и ассистент договориться действовать так, чтобы фокус гарантированно удался?

9.6. (21) В лаборатории есть 100 пробирок. В одной из них — бесцветный химикат, а в остальных — вода. Требуется определить, в какой из пробирок находится химикат. Для этого можно приготовить несколько смесей жидкостей из пробирок и отправить на экспертизу, которая для каждой смеси покажет, содержится ли в ней хотя бы 11% химиката, или нет. Какое наименьшее количество смесей надо одновременно отправить на экспертизу, чтобы по её результатам точно узнать, в какой из пробирок химикат?