Время на выполнение заданий - 200 минут

Суммарное количество баллов за работу 125. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

Требования и рекомендации к написанию решения задач

Вам необходимо привести решение всех заданий. Обратите внимание, что ответы без решений и необходимых пояснений не будут засчитаны! Все утверждения, содержащиеся в вашем решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений. Все факты, которые не являются общеизвестными или не следуют из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное. Излагайте свои мысли четко, пишите разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе. Всегда обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. В работе не должно быть никаких пометок, не имеющих отношения к выполнению заданий.

Успехов!

Задача 1. Равенство в потреблении (25 баллов)

Жители деревень Чернолесье и Белополье покупают пряники на одной ярмарке. Все продавцы знают, что за количество пряников меньше 300 ед. покупатели из Чернолесья готовы платить более высокую цену, чем покупатели из Белополья. Однако внешне жители деревень неразличимы, поэтому пряники продаются по одной цене для всех. Общий рыночный спрос описывается функцией:

$$Q_M^D = \begin{cases} 0, \ 400 < P \\ 400 - P, \, 200 < P \leqslant 400 \\ 1000 - 4P, \, 0 \leqslant P \leqslant 200, \end{cases}$$

где Q_M^D — общее количество пряников, которое покупатели суммарно готовы приобрести по цене P (в монетах). Функция предложения пряников имеет вид $Q^S = 4P$, где Q^S — количество пряников в единицах. Также известно, что спрос каждой группы при положительном количестве товара задается линейной функцией.

(а) [7 баллов] Ярмарка действует по законам конкурентного рынка и никем не регулируется. Если рынок находится в равновесии, сколько пряников покупают жители Чернолесья и сколько — жители Белополья?

(б) [10 баллов] Царь Агафон узнал от своих советников, что жители одной деревни покупают пряников больше, чем жители другой. Подумал царь и решил, что это несправедливо, и повелел ввести налог на покупателей той деревни, в которой пряников потребляют больше, да такой, чтобы объемы покупок пряников в деревнях стали одинаковыми. Получив царское веление, советники установили для покупателей одной из деревень налог размером в t монет на каждый купленный пряник. Налоги собираются непосредственно по месту жительства покупателей, так что проблем с идентификацией жителей не возникает.

Чему равна ставка такого налога? Сколько пряников теперь покупают жители каждой деревни?

(в) [8 баллов] В народе одни такой налог хвалили, а другие, как водится, ругали. Выиграли ли подданные царя от введения этого налога? Поясните свой ответ.

Решение.

(а) Рыночное равновесие: $P^e = 125, Q^e = 500$.

Спрос покупателей из Чернолесья: $Q_1 = 400 - P$ (они готовы платить более высокую цену при $Q < 300$). В равновесии $Q_1 = 275$.

Спрос покупателей из Белополья: $Q_2 = Q_M^D - Q_1 = 1000 - 4P - (400 - P) = 600 - 3P$. В равновесии $Q_2 = 225$.

(б) Налог вводится на покупателей из Чернолесья, поскольку их объем покупок был больше: $Q_1 = 400 - P - t$. Предположим, что $t < 200$. Тогда с учетом налога рыночный спрос:

$$Q_M^D = \begin{cases} 0,\ P \leqslant 200 \\ 400 - P - t,\ 200 < P \leqslant 400 - t \\ 1000 - 4P - t,\ 0 < P \leqslant 200 \end{cases}$$

Равновесная цена после введения налога: $P^e = 125 - \frac{t}{8}$.

Объемы потребления: $Q_1 = 400 - P - t = 275 - \frac{7}{8}t$, $Q_2 = 600 - 3P = 225 + \frac{3}{8}t$

$$\begin{gathered} Q_1 = Q_2 \\ 275 - \frac{7}{8}t = 225 + \frac{3}{8}t \\ 50 = \frac{10}{8}t \\ t = 40 \Rightarrow Q_1 = Q_2 = 240 \end{gathered}$$

Заметим, что ставка налога получилась меньше 200, поэтому ограничение, установленное выше, выполнено. Если бы ставка налога была выше 200, то потребляемые количества не могли бы совпасть.

(в) 1-й спрос: цена покупки с учетом налога выросла $P_d = 120 + 40 = 160$, объем покупок сократился, благосостояние ухудшилось.

2-й спрос: цена уменьшилась, объем покупок вырос, благосостояние улучшилось.

Предложение: цена снизилась, объем продаж сократился, благосостояние ухудшилось.

От введения налога жители Чернолесья проиграли, но выиграли жители Белополья, т.к. введение налога привело к снижению равновесной цены. Продавцам введение такого налога невыгодно, т.к. оно приводит к уменьшению рыночного спроса. [1]

[1] Для ответа участник мог посчитать: $CS_1 = 46250$, $PS_1 = 31250$, $SW_1 = 77500$, $CS_2 = 38400$, $PS_2 = 28800$, $Tx = 9600$, $SW_2 = 76800$ (включая налоговые сборы), $SW_2 = 67200$ (не включая налоговые сборы).

Критерии оценивания.

(а)
- **2 балла** за рыночное равновесие.
- **1 балл** за спрос первой группы.
- **1 балл** за спрос второй группы.
- **1 балл** за идентификацию групп.
- **1 балл** за количество, покупаемое жителями Белополья.
- **1 балла** за количество, покупаемое жителями Чернолесья.

Если группы не названы и из решение непонятно, какое количество относится к какой группе, то ставится за пункт 4 балла из 7.

(б)
- **1 балл** за определение деревни, на жителей которой будет введен налог.
- **2 балла** за новый рыночный спрос с налогом.
- **2 балла** за новую рыночную цену, зависящую от ставки налога.
- по **1 баллу** за новые количества, потребляемые жителями деревень, в зависимости от ставки налога.
- **1 балл** за равенство количеств.
- **1 балл** за составление уравнения для поиска налога.
- **1 балл** за ответ.

(в)
- **1 балл** за ответ про благосостояние жителей Белополья и **2 балла** за пояснение ответа.
- **1 балл** за ответ про благосостояние жителей Чернолесья и **2 балла** за пояснение ответа.
- **1 балл** за ответ про благосостояние продавцов и **1 балл** за пояснение ответа.

По критерию ставился 1 балл за ответ без пояснений. Ставилось 2 балла за ответ с объяснением, опирающимся на неверные предпосылки. 6 баллов ставилось за ответ об изменении благосостояния только части агентов. Полный балл ставился за ответ с объяснением.

Задача 2. Миллионы белых роз (25 баллов)

В Королевстве Роз жители очень любят клумбы с цветами. Садовник Иван, известный профессионал в деле создания клумб, обсуждает контракт с Заказчиком.

Изначальный план Заказчика состоит в том, чтобы всего (суммарно на всех клумбах) было высажено x миллионов белых роз и y миллионов синих роз (оба эти количества могут быть не целыми; каждый высаженный миллион роз занимает одну условную единицу длины и имеет нулевую ширину), при этом должно быть m прямоугольных клумб только с белыми розами и n прямоугольных клумб только с синими розами (никаких других клумб не должно быть). Кроме того, высаживать цветы нужно только по краю каждой клумбы (изменить это требование Иван не в силах, так как Заказчик всенепременно хочет ставить в центры клумб статуи). Денежное вознаграждение Ивана равно суммарной площади всех клумб (так как Заказчик ценит именно такую площадь и готов за неё платить). Иван хотел бы максимизировать своё вознаграждение, поэтому он поэтапно предлагает вносить правки в изначальный план.

Известно, что цветы можно приобретать только на рынке, где 1 миллион белых роз стоит 2 золотые монеты, а 1 миллион синих роз стоит 3 золотые монеты. Заказчик готов покрыть расходы садовника на цветы в размере не более 216 золотых монет (считайте, что деньги бесконечно делимы), а собственные средства на покупку цветов Иван расходовать не может.

(а) [4 балла] Иван рассматривает i-ю клумбу, на которую планируется посадить x_i белых роз (это число фиксировано). Какое соотношение сторон Иван предложит Заказчику для этой клумбы, а также для всех остальных клумб, чтобы максимизировать свой доход?

(б) [7 баллов] Пусть Заказчик принял предложение садовника о соотношении сторон из п. (а), поэтому Иван решил продолжить оптимизацию плана.

Рассмотрим первую и вторую клумбы с белыми розами, на которых планируется посадить x_1 и x_2 роз, соответственно. Найдите, каким будет изменение суммарной площади всех клумб, если все розы со второй клумбы перераспределить на первую, сохранив оптимальное соотношение сторон.

Приведите объяснение для полученного результата.

(в) [3 балла] Какое число клумб с розами каждого цвета Иван предложит Заказчику, чтобы максимизировать свой доход?

(г) [8 баллов] Пусть Заказчик принял предложение Ивана о числе клумб с розами каждого цвета. Какое число белых и какое число синих роз Иван предложит посадить, чтобы максимизировать свой доход? Найдите вознаграждение Ивана.

(д) [3 балла] Пусть Заказчик принял и это предложение. Довольный своими успехами в переговорах, Иван уже почти лёг спать, как вдруг получил СМС от Заказчика с неожиданным предложением заменить каждую согласованную ранее прямоугольную клумбу на две клумбы в форме прямоугольных треугольников. Не производя вычислений, объясните, как это предложение, если оно будет реализовано, повлияет на вознаграждение Ивана и почему (необходимо привести только одно обоснование).

Решение.

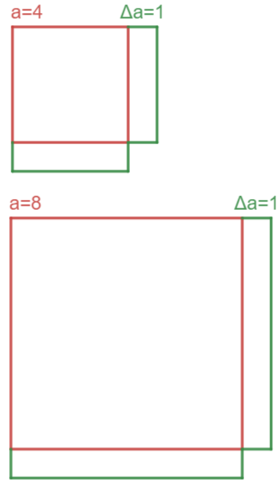
(а) Определим оптимальное соотношение сторон клумбы из соображений, что при нём должна максимизироваться площадь клумбы при её фиксированном периметре (так как здесь фиксированный периметр соответствует фиксированному количеству роз на клумбе, а максимизация площади соответствует оптимальному использованию этих роз).

Пусть одна сторона прямоугольной клумбы равна a, другая сторона равна b, тогда периметр клумбы равен $2a + 2b = x_i$, а площадь клумбы равна $S = a \cdot b$. Пользуясь тем, что периметр фиксирован, выразим $a = \frac{x_i}{2} - b$ и подставим в выражение для площади: $S = \left(\frac{x_i}{2} - b\right) \cdot b$. Это парабола с ветвями вниз как функция от b, её максимум достигается в вершине, ей соответствует точка $b = \frac{\frac{x_i}{2}+0}{2} = \frac{x_i}{4}$, тогда $a = \frac{x_i}{2} - \frac{x_i}{4} = \frac{x_i}{4} = b$, тогда $\frac{a}{b} = 1$, то есть каждый прямоугольник должен быть квадратом.

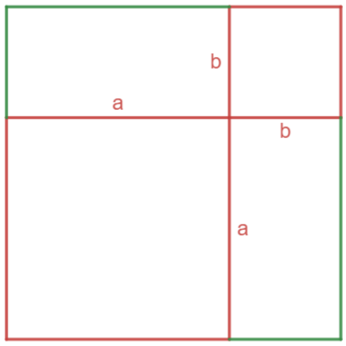
(б) Если на обозначенных двух клумбах высажено x_1 и x_2 роз, соответственно, то их суммарная площадь до перераспределения равна $\left(\frac{x_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{4}\right)^2$ (деление на 4 возникает в связи с тем, что если на всю квадратную клумбу посажено x_k цветов, то на каждую из четырёх её сторон приходится $\frac{x_k}{4}$ цветов).

После перераспределения сторона первой клумбы становится равна $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4}$, сторона второй клумбы становится равна 0, тогда площадь этих двух клумб после перераспределения равна $\left(\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4}\right)^2 + 0^2 = \left(\frac{x_1}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x_1}{4} \cdot \frac{x_2}{4} + \left(\frac{x_2}{4}\right)^2$, тогда изменение суммарной площади после перераспределения (заметим, что площадь остальных клумб не менялась, поэтому изменение их площади равно 0) равно $\left[\left(\frac{x_1}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x_1}{4} \cdot \frac{x_2}{4} + \left(\frac{x_2}{4}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{x_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{4}\right)^2\right] = 2 \cdot \frac{x_1}{4} \cdot \frac{x_2}{4} = \frac{x_1 x_2}{8}$.

Интуитивно, из-за того, что в оптимуме площадь каждой клумбы равна квадрату длины её стороны, при небольшом фиксированном увеличении длины стороны клумбы увеличение её площади тем больше, чем больше изначальное значение длины стороны, так как больше площадь дополнительных прямоугольников, которые добавляются к изначальному квадрату (это соответствует концепции возрастающей отдачи от масштаба), из-за этого при расположении цветов на одной клумбе вместо двух площадь не уменьшается: такое расположение позволяет в большей степени использовать эффект ускоряющегося увеличения площади.



Кроме того, можно заметить, что при совмещении двух клумб и перемещении части их сторон так, чтобы была образована одна большая квадратная клумба, площадь увеличивается за счёт двух дополнительных прямоугольников со сторонами, равными сторонам двух исходных клумб.



(в) В решении для п. (б) было получено, что изменение суммарной площади клумб выбранного цвета из-за предложенного перераспределения равно $\frac{x_1 \cdot x_2}{8}$. Поскольку $x_k \geq 0$ (так как это число цветов на отдельно взятой клумбе), приращение $\frac{x_1 \cdot x_2}{8} \geq 0$. Кроме того, если $x_1 > 0, x_2 > 0$, то $\frac{x_1 \cdot x_2}{8} > 0$. Таким образом, если высажено хотя бы две клумбы со строго положительным числом роз выбранного цвета, можно увеличить площадь (а значит и вознаграждение Ивана), сделав на одну клумбу со строго положительным числом роз этого цвета меньше за счёт вышеописанного перераспределения.

Итеративно повторяя этот аргумент (то есть последовательно уменьшая на 1 число клумб со строго положительным числом роз выбранного цвета), получим, что если изначально запланировано высадить больше одной клумбы со строго положительным числом роз этого цвета, то Ивану оптимально перераспределить цветы на них так, чтобы в итоге была высажена только одна клумба с такими розами (если высажена только одна клумба, аргумент с дальнейшим перераспределением цветов перестаёт работать, так как больше нет других клумб с положительным числом роз того же цвета). Таким образом, Ивану оптимально предложить Заказчику высаживать по одной клумбе с розами каждого цвета.

(г) По результатам проделанного выше анализа Иван рассматривает высадку двух квадратных клумб (по одной с розами каждого цвета). Поскольку он покупает x и y миллионов белых и синих роз, соответственно, стороны этих клумб равны $\frac{x}{4}$ и $\frac{y}{4}$, тогда вознаграждение садовника равно сумме площадей этих двух клумб, то есть $S = S_x + S_y = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2$. Заметим, что эта площадь не убывает по x и y при их неотрицательных значениях, поэтому Ивану для её максимизации следует тратить на покупку цветов все 216 золотых монет.

Используя идею из п. (б) и (в), предположим, что изначально планировалось высадить x и y миллионов белых и синих роз, соответственно, потратив на них все 216 монет, и рассмотрим перераспределение средств на синие розы на покупку вместо них (более дешёвых) белых роз: так как цены белых и синих роз равны 2 и 3 монеты, соответственно, то вместо y синих роз можно приобрести $\frac{3}{2}y$ белых роз, тогда суммарная площадь клумб после перераспределения будет равна $\left(\frac{x+\frac{3}{2}y}{4}\right)^2 + 0^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{y}{4} + \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{y}{4}\right)^2$, тогда изменение суммарной площади двух клумб после перераспределения составит $\left[\left(\frac{x}{4}\right)^2 + 3 \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{y}{4} + \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{y}{4}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2\right] = 3 \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{y}{4} + \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{y}{4}\right)^2 \geq 0$, так как $x \geq 0$, $y \geq 0$, при этом полученное приращение положительно при $y > 0$, то есть перераспределение положительных расходов с синих роз на белые розы увеличивает суммарную площадь, поэтому оптимально приобретать только белые розы (приобретать $\frac{216}{2} = 108$ миллионов белых роз, 0 миллионов синих роз).

Альтернативный способ оптимизации суммарной площади, равной $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2$: поскольку садовник тратит на цветы все 216 монет, он выбирает из всех таких комбинаций $x \geq 0$ и $y \geq 0$, что $2x + 3y = 216$, что можно переписать в виде $x = 108 - \frac{3}{2}y$. Подставив это ограничение в вознаграждение, получим $16S = \left(108 - \frac{3}{2}y\right)^2 + y^2 = 108^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 108y + \frac{9}{4}y^2 + y^2 = 108^2 - 324y + \frac{13}{4}y^2$. Это парабола с ветвями вверх, поэтому в её вершине достигается минимум $\Bigl($этой точке соответствует $y = \frac{324}{2\cdot\frac{13}{4}} = \frac{648}{13} = \frac{650-2}{13} = 50 - \frac{2}{13}\Bigr)$, поэтому необходимо рассмотреть и сравнить две наиболее удалённые от вершины точки: $y = 0$ и $y = \frac{216}{3} = 72$.

Поскольку парабола симметрична относительно вертикальной прямой, проходящей через её вершину, а ветви параболы в данном случае направлены вверх, значения аргумента, расположенные дальше от абсциссы вершины, соответствуют большему значению функции. Тогда, поскольку $\left(50-\frac{2}{13}\right)-0>72-\left(50-\frac{2}{13}\right)$, точка $y=0$ соответствует большему значению вознаграждения, тогда Ивану необходимо выбрать 0 миллионов синих роз и, соответственно, $\frac{216}{2}=108$ миллионов белых роз.

Вознаграждение Ивана в найденном оптимуме будет равно $S=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=\left(\frac{108}{4}\right)^2+\left(\frac{0}{4}\right)^2=27^2=729$.

(д) Поскольку ранее была согласована одна квадратная клумба с белыми розами, новое предложение предполагает высадку двух клумб в форме прямоугольных треугольников с белыми розами.

Чтобы новые клумбы оказались в совокупности того же формата и размера, что и полученный выше единственный квадрат, необходимо высадить две клумбы в форме равнобедренных прямоугольных треугольников, однако при этом придётся дополнительно два раза высадить диагональ квадрата (равную гипотенузе прямоугольного треугольника), что будет недоступно при исходном ограничении на расходы, поэтому для реализации предложения Заказчика через два прямоугольных треугольника придётся уменьшить их размеры (длины сторон) и, соответственно, суммарную площадь клумб, равную вознаграждению Ивана.

Кроме того, даже если все цветы будут высажены только на одном прямоугольном треугольнике (что может быть более оптимально из тех же соображений, из которых оптимален один квадрат, а не несколько), то вознаграждение Ивана снизится, так как при одинаковом периметре квадрата и прямоугольного треугольника квадрат накрывает площадь более эффективно, то есть площадь единственного прямоугольного треугольника будет меньше площади исходного квадрата.

Критерии оценивания.

(а) *Верная постановка задачи максимизации, с проверкой условий второго порядка и верным ответом, приносит полный балл за данный пункт, даже если отличается от эталонного решения.*

Ответы на вопрос задания, приведённые без какого-либо обоснования, оцениваются в 0 баллов.

- **1 балл** за постановку задачи оптимизации (словами или математически).
- **1 балл** за запись целевой функции как функции одной переменной (подстановку ограничения в целевую функцию).
- **1 балл** за нахождение точки максимума по одной из переменных.
- **1 балл** за нахождение оптимального соотношения сторон (в виде непосредственно их отношения или вывода о том, что получен квадрат).

(б)
- **1 балл** за запись площади клумб до перераспределения.
- **1 балл** за запись площади клумб после перераспределения.
- **3 балла** за вывод выражения для изменения площади (промежуточные баллы: 1 балл за взятие разности площадей, 1 балл за раскрытие скобок для площади после перераспределения / другое упрощение, 1 балл за итоговое выражение).

  Если корректно получено итоговое выражение, полный балл по этому критерию ставился при любом правильном способе его получения.
- **2 балла** за интуитивное / графическое обоснование.

  По данному критерию ставится на 1 балл меньше (но не менее 0 баллов за критерий) за каждую фактическую (связанную с фактами из условия или решения задачи) и за каждую логическую ошибку.

(в)
- **1 балл** за получение вывода о том, что если у двух клумб были положительные длины сторон, то площадь после перераспределения (строго) увеличится.
- **1 балл** за идею итеративного применения аргумента об увеличении площади после перераспределения.
- **1 балл** за вывод о том, что нужно предлагать по одной клумбе каждого цвета.

(г) *Верная постановка задачи максимизации, с проверкой условий второго порядка и верным ответом, приносит полный балл за данный пункт, даже если отличается от эталонного решения.*

Ответы на вопрос задания, приведённые без какого-либо обоснования, оцениваются в 0 баллов.

- **1 балл** за запись целевой функции (ставится 0 баллов по этому критерию, если не введены другие обозначения и площадь записана в виде $S = \beta\left(x^2 + y^2\right)$, где $\beta \neq \frac{1}{16}$).
- **1 балл** за связь между x и y (за обоснование, почему нужно тратить все 216 монет).
- **6 баллов** за оптимизацию:

* *При оптимизации через подстановку ограничения на расходы:*
- 1 балл за запись целевой функции как функции от одной переменной (подстановку ограничения в целевую функцию).
- 1 балл за указание вида функции (парабола ветвями вверх / функция, для которой условия первого порядка не дают точку максимума).
- 1 балл за указание потенциальных оптимумов (граничных точек)

  По данному критерию 1 балл ставится, только если указаны обе точки.
- 1 балл за сравнение значения функции в этих точках и выбор оптимальной точки.
- 1 балл за нахождение оптимального количества роз другого цвета.
- 1 балл за найденное вознаграждение Ивана.

* *При оптимизации через перераспределение расходов на цветы:*

– 1 балл за вычисление стороны клумбы с розами определённого цвета после перераспределения расходов на эти цветы.

– 2 балла за вывод выражения для изменения площади (промежуточные баллы: 1 балл за взятие разности площадей, 1 балл за итоговое выражение).

Если корректно получено итоговое выражение, полный балл по этому критерию ставился при любом правильном способе его получения.

– 1 балл за вывод о том, что площадь увеличится, если изначально $y > 0$ / за вывод, эквивалентный этому *И* получение количества роз одного из цветов.

– 1 балл за нахождение оптимального количества роз другого цвета.

– 1 балл за найденное вознаграждение Ивана.

(д)
- **1 балл** за ясную формулировку того, как понято предложение Заказчика (как будет реализовано предложение, сколько будет прямоугольных треугольников) *И* вывод об уменьшении вознаграждения.
- **2 балла** за объяснение.

  По данному критерию ставится на 1 балл меньше (но не менее 0 баллов за критерий) за каждую фактическую (связанную с фактами из условия или решения задачи) и за каждую логическую ошибку.

  Примечание: корректные обоснования, отличающиеся от приведённого в решении, также оцениваются в полный балл.

Задача 3. Вот такие пироги (25 баллов)

В одной деревне есть домохозяйка, которая раз в год печет пирог для всей деревни, причем этот пирог может быть либо большим, либо маленьким. За приготовленный пирог домохозяйка получает деньги с жителей деревни, которые готовы отдать 1000 д.е. за маленький пирог и 1800 д.е. — за большой. У домохозяйки есть все ингредиенты для приготовления пирога, кроме муки, которая со временем портится из-за влажности, поэтому каждый год домохозяйка должна покупать муку заново. Известно, что для маленького пирога ей требуется 5 кг муки, а для большого — 12 кг, и изменять рецепт нельзя.

Домохозяйка покупает муку у мельника, который продает товар только ей и исключительно в мешках по 8 кг, при этом цена за мешок муки составляет P д.е. Известно, что издержки мельника на производство 1 мешка муки составляют 480 д.е. Домохозяйка и мельник максимизируют свою прибыль. Считайте, что если домохозяйке безразлично, какой пирог испечь, то она испечет большой.

(а) [4 балла] Покажите графически зависимость прибыли домохозяйки от цены одного мешка муки. Найдите спрос домохозяйки на мешки с мукой $Q(P)$, где Q — количество мешков с мукой, а P — цена 1 мешка муки в д.е.

(б) [2 балла] Найдите цену P, которую установит мельник за 1 мешок, и его прибыль. Какой пирог будет готовить домохозяйка на праздник?

(в) [6 баллов] *В результате инфляции издержки мельника на производство муки выросли в 1,5 раза. Однако цена, которую готовы платить жители за каждый пирог, увеличилась только на 20%.*

Чтобы увеличить свою прибыль, мельник решил поднять цену за мешок муки в a раз. При каком значении a его прибыль будет максимальной?

(г) [7 баллов] *Предположим, что вместо увеличения цены мельник решил воспользоваться другой мерой: уменьшить объем мешка с мукой в b раз. Тогда его издержки также сократятся в b раз относительно новых издержек, а цена за проданный мешок останется такой же, как в пункте (б).*

Найдите значение b, при котором прибыль мельника будет максимальной. Сравните прибыль мельника от данной меры с прибылью из предыдущего пункта.

(д) [6 баллов] *(Вы можете ответить на этот вопрос, не решая предыдущие пункты.)* В этой задаче рассматривается снижение объема товара в упаковке при неизменной цене, которое называется шринкфляция. Приведите две причины, почему продавцы могут прибегать именно к этой мере, а не к увеличению цены. *(Если Вы приведете более двух причин, то оцениваться будут только первые две.)*

Решение.

(а) Домохозяйка купит 2 мешка муки для большого пирога и 1 мешок муки для маленького.

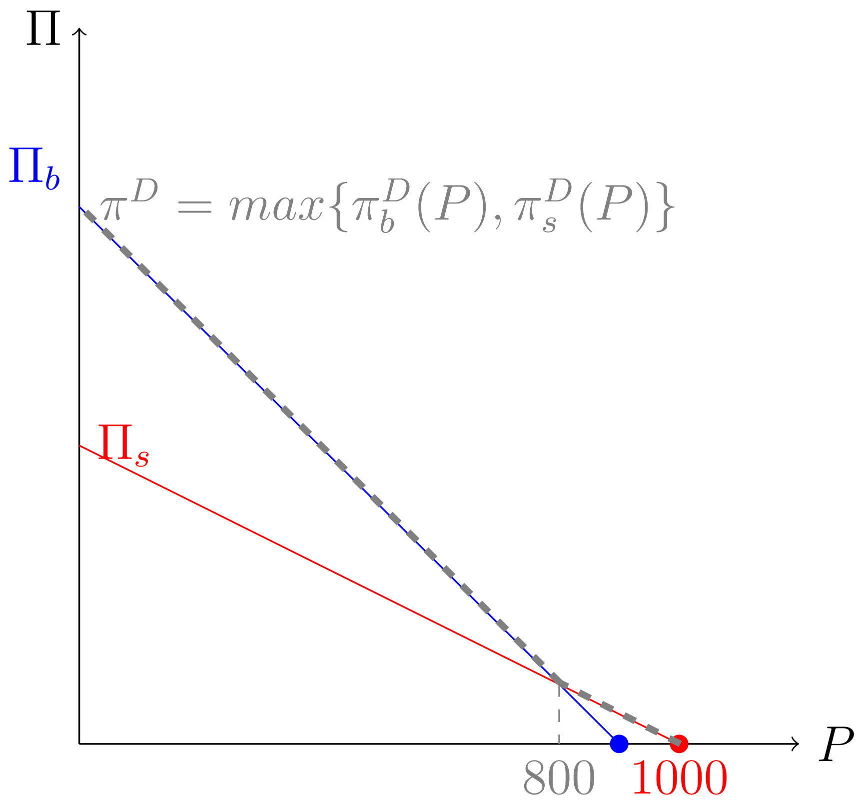
Прибыль от приготовления большого пирога $\pi_b^D = 1800 - 2P$. Она будет печь пирог если её прибыль неотрицательная ($\pi_b^D = 1800 - 2P \geq 0$), соответственно, при цене $P > 900$ она откажется от его приготовления. Прибыль от приготовления маленького пирога $\pi_s^D = 1000 - P$. При $P > 1000$ она откажется от его приготовления. Кроме того, домохозяйка изготавливает тот пирог, который принесет ей большую прибыль:

$$\pi^D = max\{\pi_b^D(P), \pi_s^D(P)\}$$

Сравниваем 2 прибыли $\pi_b^D \geq \pi_s^D$.

$$1800 - 2P \geq 1000 - P$$

При цене $P \leq 800$ домохозяйка будет печь большой пирог и купит 2 мешка муки. В альтернативном случае при цене ниже 1000 она будет печь маленький пирог и купит 1 мешок муки.



Получаем такой спрос:

$$Q^d = \begin{cases} 2 & P \leq 800 \\ 1 & 800 < P \leq 1000 \\ 0 & 1000 < P \end{cases}$$

(б) Рассмотрим два случая, когда мельник продаст 1 мешок и 2 мешка. В каждом случае он установит максимальную цену, которую готова платить домохозяйка, для максимизации своей прибыли:

1. $P = 1000$: $\pi_1^M = 1000 - 480 = 520$.
2. $P = 800$: $\pi_2^M = 2(800 - 480) = 640$.

Наибольшую прибыль дает цена $P = 800$, которую и установит мельник, он получит прибыль 640. Домохозяйка приготовит большой пирог и получит прибыль $\pi^D = 1800 - 1600 = 200$.

(в) Новые издержки за мешок 720. Новые цены за пирог: 1200 и 2160.

Новый спрос (находится аналогично пункту (а)):

$$Q^d = \begin{cases} 2 & P \leq 960 \\ 1 & 960 < P \leq 1200 \\ 0 & 1200 < P \end{cases}$$

Мельник будет выбирать между ценами 960 и 1200, так как это максимальные цены на соответствующих участках спроса. При ценах ниже выручка мельника будет меньше, а издержки не изменятся. Рассмотрим два варианта:

1. Остаться на этом участке: $\pi_1^M = 1920 - 1440 = 480$.
2. Перейти на новый участок: $\pi_2^M = 1200 - 720 = 480$.

Прибыли одинаковы $\Rightarrow$ ему безразлично, какую из двух цен установить $\Rightarrow$ подходят оба варианта: $P = 1200$, $a = 1200/800 = 1.5$ и $P = 960$, $a = 1920/1600 = 1{,}2$.

(г) Издержки на мешок $\frac{720}{b}$. Цена за мешок $P = 800$. Объем муки в мешке: $b = \frac{8}{b}$.

- Если домохозяйка купит больше трёх мешков, она получит отрицательную прибыль.
- Допустим, домохозяйка купит 2 мешка. Тогда у неё будет $\frac{16}{b}$ кг муки. Если она готовит маленький пирог, то её прибыль отрицательная: $\pi_2^D = 1200 - 1600 = -400$.

  Рассмотрим случай, при котором муки в мешке столько, что она может приготовить большой пирог: $\frac{16}{b} \geq 12$. Тогда $b \leq \frac{4}{3}$. Если она приготовит большой пирог её прибыль составит $\pi_1^D = 2160 - 1600 = 560$.

  Прибыль мельника в этом случае: $\pi_1^M = 1600 - \frac{16}{b}$.

  Чем выше b, тем меньше издержки и больше прибыль. Значит, мельник установит наибольшее доступное $b = \frac{4}{3}$. Тогда его прибыль составит $\pi = 1600 - 2 * 720 * 3/4 = 520$.
- Допустим, домохозяйка купит только 1 мешок. Тогда муки в мешке должно хватать на приготовление маленького пирога: $8/b \geq 5$, $b \leq 8/5$. Ее прибыль будет равна $\pi_2^D = 1200 - 800 = 400$.

  Аналогично, мельник установит наибольшее доступное $b = 8/5$, а прибыль будет равна $\pi^M = 800 - 720 * 5/8 = 350$.

Для мельника выгоднее ситуация, при которой домохозяйка купит 2 мешка. Соответственно, мельник выберет $b = \frac{4}{3}$, его новая прибыль составит $\pi^M = 520$. А значит, его прибыль больше по сравнению с предыдущим пунктом.

(д) Возможные ответы:

- Невнимательные покупатели могут не заметить изменение объема;
- Желание казаться более лояльными к покупателям, сохраняя прежнюю цену;
- Часть товара в упаковке не используется (если он, например, скоропортящийся), покупатели не испытывают неудобства от уменьшения объема.

Критерии оценивания.

(а)
- **1 балл** за нахождение двух прибылей.
- **1 балл** за нарисованный график (должна быть отмечена точка $P = 800$ и выделена верхняя огибающая).

- **2 балла** за функцию спроса.

  1 балл ставился, если точка $P = 800$ включена не в тот участок спроса или отсутствует участок $P < 480$. Если не найдена верхняя граница ($P \leq 1000$) для участка $Q = 1$, за последний критерий ставилось 0 баллов. Балл не снижался, если участок $P > 1000$ не выписан отдельно.

(б)
- **1 балл** за идею о рассмотрении пограничных цен.
- **1 балл** за вычисление двух прибылей прибылей и ответ.

  Если рассмотрена только одна прибыль, то ставился 1 балл за весь пункт.

(в)
- **1 балл** за новые издержки и цены на пирог.
- **1 балл** за новый спрос.
- по **1 баллу** за вычисление прибыли мельника на первом и втором участке.
- **1 балл** за сравнение прибылей и указание на безразличие.
- **1 балл** за нахождение a для каждого из случаев.

(г)
- **1 балл** за новые издержки.
- **1 балл** за рассмотрение случая покупки 3 и более мешков.
- **1 балл** за рассмотрения случая покупки 2 мешков для большого пирога и подсчет прибыли домохозяйки.
- **1 балл** за рассмотрения случая покупки 2 мешков для маленького пирога.
- **1 балл** за рассмотрение случая покупки 1 мешка для маленького пирога и подсчет прибыли.
- **1 балл** за идею о том, что мельник будет ставить наибольшее b при ограничении.
- **1 балл** за нахождение оптимального b и сравнение новой прибыли с предыдущим пунктом.

  Балл за последний критерий ставился в том случае, если присутствует полное обоснование выбора мельника.

(д)
- по **3 балла** за каждую из причин.

  Неполный балл ставится за рассуждения, не доведенные до конца и/или содержащие логические ошибки. 3 балла ставилось за рассуждения про спрос с высокой эластичностью. 1 балл ставился за издержки меню. 0 баллов ставилось за рассуждения о снижении издержек, не показывающие почему при таких условиях спрос на товар останется неизменным. 0 баллов ставилось за ссылку на модель, описываемую в задаче, при отсутствии пояснений.

Задача 4. Индекс энергетического кризиса (25 баллов)

Посмотрите на таблицу ниже, прочитайте описание индекса и ответьте на вопросы.

Индекс энергетического кризиса

Данные от 21.11.2022

Хуже — Лучше

	Франция	Германия	Италия	Польша	Испания	Велико-британия
Общий балл	34	36	26	45	16	28
Наполнение газовых хранилищ (%)	99	100	94	99	96	100
Нагрузка на сеть (ГВт)	53.2	51.5	25.0	18.6	22.2	26.5
Цены на газ (€)	88	116	109	119	53	42
Цены на энергию (€)	213	194	229	204	81	200
Средняя температура (°C)	9	3	11	0	11	7

Рис. 1: Источник: Bloomberg

Методология индекса энергетического кризиса:

Индекс энергетического кризиса Bloomberg измеряет уровень нагрузки на энергетические системы в ряде крупных европейских стран с использованием пяти параметров: хранение газа; процент заполнения; мощность нагрузки, ГВт; цены на газ и электроэнергию за МВтч на сутки вперед; прогноз температуры на сутки вперед. В таблице цены на газ и электроэнергию указаны в евро.

(а) [8 баллов] Назовите две страны, в которых вероятность энергетического кризиса наибольшая. Используя приведенные данные, объясните, почему вероятность энергетического кризиса в этих странах наибольшая.

(б) [5 баллов] В индекс энергетического кризиса входят 4 параметра, связанные напрямую с энергетикой. Предположите, почему в этом индексе также учитывается такой параметр, как прогноз температуры?

(в) [12 баллов] Мировую торговлю энергоресурсами можно воспринимать как способ политического влияния стран друг на друга. Объясните данное предположение на примере любого энергетического кризиса.

Решение.

(а) Германия и Польша. Возможные объяснения:

- Относительно низкие температуры в этих регионах, что вынуждает повысить энергопотребление на *обогрев* зданий;

- Высокие цены на газ, вызванные *волатильностью* на мировом рынке и *зависимостью от России* как страны-экспортера энергоносителей;
- В Германии — высокая зависимость экономики от *производства* (например, перерабатывающая отрасль и машиностроение).

(б) Уменьшение/увеличение температуры влечет за собой увеличение/уменьшение использования энергетики для поддержания «нормальной» температуры в помещениях (*обогрев помещений*)

(в) Модель ответа:

- Нефтяное эмбарго, 1973–1974 гг. Во время арабо-израильской войны 1973 года арабские члены Организации стран-экспортеров нефти (ОПЕК) ввели эмбарго против Соединенных Штатов после решения США пополнить запасы израильских вооруженных сил. Арабские члены ОПЕК также распространили эмбарго на другие страны, которые поддерживали Израиль, включая Нидерланды, Португалию и Южную Африку.
- Санкции против России 2022 года. Вторичные санкции, процессы регионализации (запад против востока), геополитическое "разделение мира".

Критерии оценивания.

(а) По **1 баллу** за правильно названную страну, **6 баллов** (по 3 балла для каждой страны) за обоснование, почему в этих странах вероятность энергетического кризиса наибольшая *(0 баллов ставилось за чтение таблицы, сравнение числовых показателей по странам без приведения конкретных аргументов.)*

(б) **5 баллов** за верный ответ.

(в) **2 балла** за пример энергетического кризиса (название кризиса, годы и страны-участники), **4 балла** за описание кризиса, **6 баллов** за объяснение механизмов влияния.

Задача 5. Международная торговля в период пандемии COVID-19 (25 баллов)

Вы вместе с подругой Настей готовите задание и проект по мировой экономике. Вы можете пользоваться текстом, который был дан учителем, для погружения в тему.

Прочитайте текст ниже и ответьте на вопросы после текста.

2020 год ознаменовался одним из крупнейших сокращений объемов мировой торговли и производства со времен Второй мировой войны. Спад торговли в первой половине 2020 года был частично компенсирован резким восстановлением во второй половине 2020 года, в результате финальные данные по динамике мировой торговли по итогам года оказались лучше ожиданий. По данным ООН, в 2020 году объем международной торговли сократился на 9 процентов, в т.ч. на 6 процентов снизилась торговля товарами и на 16,5 процентов — торговля услугами. В 2021 году объем мировой торговли достиг рекордного уровня — примерно 28,5 трлн долл. США, что на 25 процентов больше, чем 2020 году и на 13 процентов больше по сравнению с периодом до пандемии — 2019 годом

За относительно положительными показателями совокупной торговли, однако, скрываются значительные различия между товарами, секторами экономики и торговыми отношениями. Торговый коллапс в начале 2020 года не затронул все товары и услуги в одинаковой степени, торговля некоторыми видами товаров и услуг резко упала, в то время как торговля другими — заметно увеличилась.

В период пандемии очень важно было не допускать сбоев в производстве и поставках товаров первой необходимости. Поддержание торговли основными медицинскими товарами означает устранение барьеров, таких как тарифы на медицинские товары, необходимые для борьбы с COVID-19 (например, некоторые страны поддерживают торговые пошлины в размере до 10 процентов на наборы для тестирования на COVID-19). Это означает ускорение процедур сертификации, позволяющих как можно скорее продавать новые продукты, и обеспечение того, чтобы технические требования были научно обоснованными и не ограничивали торговлю без необходимости. Наконец, это означает усиление мер по упрощению процедур торговли, обеспечение как можно более быстрого перемещения товаров, включая определение ключевых действий, необходимых для поддержания бесперебойных таможенных процедур с ограниченным вмешательством человека.

(а) [10 баллов] Несмотря на сокращение совокупного спроса во время пандемии на какие товары или услуги наблюдался повышенный спрос?

Настя отметила, что одним из таких товаров или услуг могут быть медицинские товары. Дополните ответ, записав два других товара и/или услуги. Приведите краткое объяснение, почему спрос был повышен.

(б) [15 баллов] Объясните, что такое тарифные меры регулирования международной торговли. Какие виды тарифного регулирования торговли описаны в тексте? Объясните, что нужно делать с такими мерами для стимулирования торговли.

Решение.

(а) Возможные варианты ответа:

- Информационные услуги и сервисы;
- Продукты питания;
- Товары для дома.

(б) Модель ответа:

Тарифные меры регулирования — методы воздействия на процессы в сфере внешнеэкономической деятельности с использованием таможенных тарифов, сборов и налогов. В тексте в качестве тарифных мер регулирования упомянуты тарифы на медицинские товары и торговые пошлины в размере 10 процентов на наборы для тестирование на COVID-19. Для того, чтобы стимулировать торговлю, следует ослабить тарифные регулирования. Это позволит товарам и услугам беспрепятственно попадать на рынки других стран, чтобы обеспечить необходимыми товарами всех нуждающихся.

Критерии оценивания.
За каждую фактическую ошибку снималось 2 балла.

(а)

- по **2 балла** за верный пример.

  1 балл ставился за неоднозначный пример или пример из сферы медицинских услуг.

- по **3 балла** за полное объяснение примера, раскрывающее пример с нескольких сторон.

  2 балла ставилось за неполное объяснение, слабо раскрывающее пример, либо объяснение, содержащее фактические ошибки. 1 балл ставился за объяснение слабо раскрывающее пример и/или слабо связанное с пандемией COVID-19.

(б)

- **7 баллов** за определение тарифных мер, из которых
  - до 3 баллов за описание того, что тарифные меры регулируют международную торговлю.
    0 баллов ставилось за все определение, если этот аспект не раскрыт в объяснении.
  - до 1 балла, если есть упоминание или подразумевается, что эти меры вводятся государством.
  - до 3 баллов за упоминание тарифной специфики таких мер.
    0 баллов ставилось при отсутствии этих упоминаний. При упоминании квот вместе с тарифными мерами балл снижался на 1.

- **4 балла** за виды тарифного регулирования:

  4 балла ставилось, если упомянуты только тарифные меры. 2 балла ставилось, если упомянуты и тарифные, и нетарифные меры. 0 баллов ставилось, если упомянуты только нетарифные меры.

- **2 балла** за необходимое направление изменения:

  2 балла ставилось, если есть упоминание, что тарифные меры нужно отменять для стимулирования торговли. 1 балл ставился, если упомянуты нетарифные меры.

- **2 балла** за объяснение механизма:

  2 балла ставилось, если есть объяснение механизма влияния тарифов на торговлю. 1 балл ставился, если если есть только утверждение что тарифы негативно влияют на торговлю.