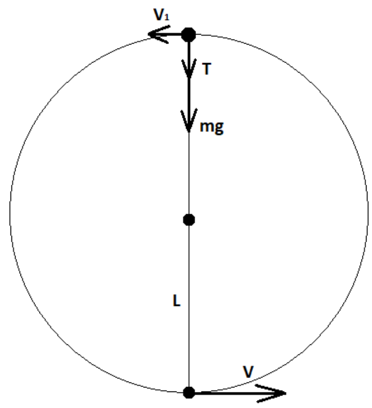
10 класс. Решения.

Каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Механика.

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). Маленький грузик подвешен на невесомой и нерастяжимой нити длиной $L = 6$ м. В начальный момент времени грузику, находящемуся в нижней точке, сообщили горизонтальную скорость, равную $V = 15$ м/с. Определите, на какую максимальную высоту в процессе движения сможет подняться груз. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2 .

Решение: Сначала проверим, сможет ли груз совершить полный оборот относительно точки подвеса по окружности. Обозначим, в соответствии с условием, скорость грузика в нижней точке V. Предполагая, что грузик смог совершить полный оборот, обозначим его скорость в верхней точке V_1. Для того, чтобы тело совершило полный оборот – нить должна быть всегда в натянутом состоянии, то есть $T > 0$:



$$T + mg = ma_{\text{ц.с.}} = \frac{mV_1^2}{L}. \ (1)$$

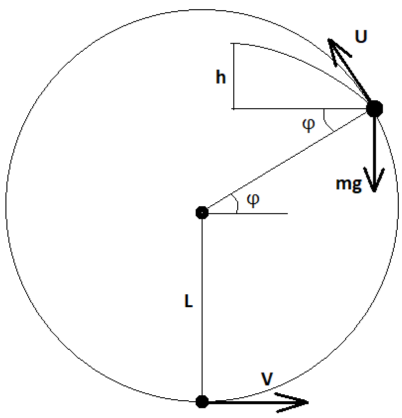
Поэтому в верхней точке скорость удовлетворяет неравенству

$$V_1^2 > Lg.$$

Отсюда получаем ограничение на скорость в нижней точке:

$$\frac{mV^2}{2} = 2mgL + \frac{mV_1^2}{2}, \qquad V > \sqrt{5gL} = 17{,}15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}. \qquad (1)$$

Согласно условию, скорость в нижней точке не удовлетворяет условию (1). Это означает, что в некоторый момент нить начнет провисать, после чего грузик продолжит двигаться только под действием силы тяжести. Определим угол φ (смотри Рисунок), при достижении которого нить начнёт провисать. Пусть скорость грузика в этот момент равна U. В этот момент натяжение нити $T = 0$, поэтому центростремительное ускорение создаётся исключительно соответствующей проекцией силы тяжести,



$$mg\sin\varphi = ma_{\text{ц.с.}} = \frac{mU^2}{L}. \qquad (2)$$

Согласно закону сохранение энергии

$$\frac{mV^2}{2} = mgL(1+\sin\varphi) + \frac{mU^2}{2}. \qquad (3)$$

Уравнения (2,3) позволяют найти угол φ и скорость U:

$$\sin\varphi = \frac{2}{3}\left(\frac{V^2}{2gL} - 1\right), \qquad U = \sqrt{gL\sin\varphi}.$$

Теперь определим высоту подъема относительно точки, в которой перестает действовать сила натяжения нити, по формуле из баллистики:

$$h = \frac{U^2\cos^2\varphi}{2g} = \frac{1}{2}L\sin\varphi\cos^2\varphi.$$

Итоговая высота полного подъёма грузика равна

$$H = L + L\sin\varphi + h = L(1+\sin\varphi) + \frac{1}{2}L\sin\varphi\cos^2\varphi \approx 10{,}8 \text{ м}.$$

Разбалловка.

Записан 2 закон Ньютона для верхней точки	2 балла
Получено ограничение на скорость в нижней точке и сказано, что данное условие не выполняется в задаче	3 балла
Записан 2 закон Ньютона при T=0	3 балла
Записан ЗСЭ при T=0	3 балла
Определен угол при котором T=0	2 балла
Определена скорость при которой T=0	2 балла
Определена высота подъема h относительно точки в котрой T=0	3 балла
Выражена высота подъема груза H	1 балла
Рассчитана высота подъема груза	1 балл

Задача 2. Термодинамика

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Абсолютно круглая и однородная планета покрыта слоем воды. Вследствие процессов радиоактивного распада в породе, из которой состоит планета, она медленно нагревается. Выделение тепла происходит равномерно во времени. Температура планеты в начальный момент измерения равна 5°C, в этот момент толщина слоя воды равна $H = 60$ м.

1. При какой температуре планеты вся вода испарится?
2. С момента, когда вся вода испарилась, наблюдения продолжались до момента, когда температура достигла $T_f = 180°C$. Какую долю тепла, выделившегося при радиоактивном распаде, вобрал в себя пар в результате этого процесса?

T, °C	P, МПа
5	0.007
100	0.1
120	0.2
134	0.3
144	0.4
152	0.5
159	0.6
165	0.7
170	0.8
175	0.9
180	1.0

В таблице приведена зависимость давления насыщенных паров воды от температуры. Масса планеты равна массе Земли ($M = 6 \cdot 10^{24}$кг), радиус совпадает с радиусом Земли, $r = 6400$ км. Удельная теплоёмкость породы планеты $C_п = 0.5$ кДж/(кг · К). Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К). В каждый момент времени считать, что на планете установлено полное тепловое равновесие. Тепловым излучением планеты, расширением породы планеты при нагреве и потерей газа в космос пренебречь. При вычислениях приближённо считать, что давление насыщенного пара при 5°С равно нулю.

Решение. 1. Глубина слоя жидкости 60 м соответствует давлению 6 атмосфер или 0.6 МПа (поскольку масса и радиус планеты совпадают с земными, то и ускорение свободного падения на её поверхности то же самое). Вся вода испарится, когда давление насыщенных паров достигнет этого значения. Согласно таблице, это произойдёт при температуре $T_1 = 159°\text{C}$.

2. Далее нагрев каждого горизонтального слоя водяного пара происходит при постоянном давлении. Это означает, что его теплоёмкость при постоянном давлении как трёх-атомного газа равна

$$c_p = 4R$$

Количества пепла $Q_п$ и $Q_в$, запасённые породой планеты и водяным паром, при нагреве от температуры T_1 до T_f, равны

$$Q_п = M \cdot C_п \cdot \left(T_f - T_1\right),$$

$$Q_в = c_p \nu \left(T_f - T_1\right), \quad \nu = \frac{M_в[\text{г}]}{18}, \quad M_в = 4\pi r^2 H \rho_в,$$

где ν – количество молей водяного пара, $M_в$ – масса водяного пара ($M_в[\text{г}]$ – в граммах), $\rho_в = 1000\ \text{кг/м}^3$ – плотность воды при земных условиях. В результате получаем

$$\frac{Q_в}{Q_п} = 10^{-5}.$$

Порядок этого отношения определяется отношением исходной глубины слоя воды и радиуса планеты, H/r.

Разбалловка.

Рассчитано давление слоя жидкости H	2 балла
Определена критическая температура	2 балла
Записана теплоемкость трехатомного газа	2 балла
Рассчитана масса воды	3 балла
Рассчитано Qп	3 балла
Рассчитано Qв	3 балла
Рассчитано H/r из Qв/Qп	5 баллов

Задача 3. Механика

У очень дешевых строителей не оказалось рулетки, зато оказалась маленькая пушка, которая может стрелять с одной и той же скоростью вылета снаряда в разных направлениях. Её поместили на пол в один из углов комнаты и смогли определить, что она на пределе возможностей может попасть точечным снарядом в самый дальний угол от неё. Для того, чтобы попасть в этот угол, она должна выстрелить под углом $\beta = 60°$ к горизонту, а чтобы попасть в самый близкий угол она должна выстрелить под углом $\alpha = 10°$ к горизонту. Определите площадь стен в квартире, если площадь пола комнаты равна $S_{\text{пола}} = 20$ м^2. Размеры пушки малы по сравнению с размером комнаты, из площади стен не исключать дверь и окно.

Решение. Обозначим стороны комнаты как a, b, а высоту комнаты за с. Пушка располагается в угле A, как показано на рисунке. Тогда B – самый близкий угол, а C – самый дальний угол.

Запишем условие того, что пушка попадает в угол B:

$$b = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (1)$$

По условию, пушка попадает в угол C на пределе возможностей, значит точка C будет являться вершиной траектории при выстреле:

$$c = \frac{V_0^2 \sin^2 \beta}{2g}, \qquad \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{V_0^2 \sin 2\beta}{2g}. \qquad (2)$$

Выразим a через b, используя (1) и второе уравнение в (2):

$$a = b\sqrt{\left(\frac{\sin 2\beta}{2\sin 2\alpha}\right)^2 - 1} \approx 0{,}77b.$$

Выразим c через b, используя (1) и первое уравнение в (2):

$$c = b\frac{\sin^2 \beta}{2\sin 2\alpha} \approx 1{,}10b$$

Согласно условию, площадь пола:

$$S_{\text{пола}} = 20\ \text{м}^2 = ab \approx 0{,}77\,b^2.$$

Площадь стен будет:

$$S = 2(a + b)c \approx 2(0{,}77 + 1) \cdot 1{,}1 \cdot b^2 \approx 5S_{\text{пола}} \approx 100\ \text{м}^2.$$

Разбалловка.

Записана формула дальности полета под углом к горизонту для выстрела в ближний угол, рассчитана длина короткой стены	4 балла
Записана формула дальности полета под углом к горизонту для выстрела в дальний угол и рассчитана высота комнаты	4 балла

Из теоремы пифагора получена длина длинной стены	4 балла
Записана формула площади пола	2 балла
Получена площадь стен	6 баллов

Задача 4. Электростатика

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). В схеме, приведенной на рисунке, соединены 2 одинаковых по размерам цилиндрических конденсатора с малым расстоянием между обкладками. При этом на каждой из пластин верхнего конденсатора вырезана четверть окружности. Определите какое количество теплоты выделится на резисторе при повороте пластин верхнего конденсатора на полный оборот. Суммарный заряд на обкладках конденсаторов q_0 и $-q_0$, а ёмкость нижнего конденсатора в начальный момент времени C, сопротивление резистора R. Поворот конденсаторов происходит двумя рывками по пол оборота. Длительность рывков мала по сравнению с $\tau = RC$, а время между рывками велико по сравнению с τ.

Решение. Первым делом отметим, что ёмкость нижнего конденсатора при повороте не меняется и остаётся C.

Вычислим распределение заряда на конденсаторах до начала поворота пластин. Эффективная площадь пластин на верхнем конденсаторе составляет 3/4 от площади пластин нижнего конденсатора. Значит ёмкость верхнего конденсатора будет принимать значение:

$$C_2' = \frac{3C}{4}.$$

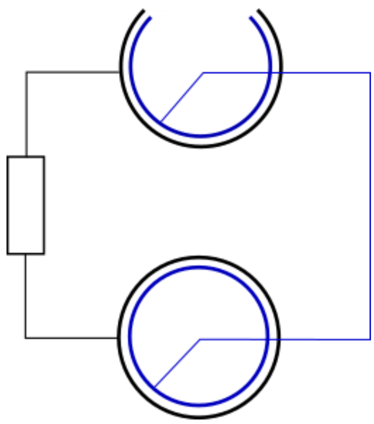
При этом заряды распределятся таким образом:

$$q_0 = q'_1 + q'_2$$

$$\frac{q'_1}{C} = \frac{q'_2}{\frac{3}{4}C}$$

$$q'_1 = \frac{4}{7}q_0$$

$$q'_2 = \frac{3}{7}q_0$$



Вычислим ёмкость верхнего конденсатора C_2 после первого полу-поворота. В этом промежуточном состоянии круглые пластины не пересекаются вырезанными секторами. В данном случае в качестве эффективной площади считается площадь пересечения пластин, которая составляет половину окружности, поэтому:

$$C_2 = \frac{C}{2}.$$

После перераспределения зарядов после первого полуповорота сумма заряда q_1 на нижнем конденсаторе и заряда q_2 на верхнем конденсаторе остаётся неизменной,

$$q_0 = q_1 + q_2$$

Из условия равенства напряжения на конденсаторах получаем значение каждого заряда:

$$\frac{q_1}{C} = \frac{q_2}{C_2} \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{2q_0}{3}, \quad q_2 = \frac{q_0}{3}.$$

Так как повороты происходят быстро, то теплота выделяется только в процессе перераспределения зарядов вне промежутка времени полуповоротов. Так что теплота, выделившаяся в системе после первого но до второго полуповорота определяется разностью запасённых энергий в конденсаторах (внешней работы в процессе перераспределения зарядов нет).

Тогда эта теплота определяется уравнением:

$$\frac{\left(\frac{q_0}{3}\right)^2}{2\frac{2}{4}C} + \frac{\left(\frac{2q_0}{3}\right)^2}{2C} + \mathrm{Q}_1 = \frac{\left(\frac{3q_0}{7}\right)^2}{2\frac{2}{4}C} + \frac{\left(\frac{4q_0}{7}\right)^2}{2C}$$

После второго полуповорота заряды на конденсаторах нам уже известны – они такие же, как и до поворотов, так как ёмкости конденсаторов оказались такими же, а заряд сохраняется. Тогда вторая часть теплоты будет определяться разностью энергий конденсаторов сразу после второго поворота и после установления равновесия зарядов после второго поворота:

$$\frac{\left(\frac{3q_0}{7}\right)^2}{2\frac{3}{4}\mathrm{C}} + \frac{\left(\frac{4q_0}{7}\right)^2}{2\mathrm{C}} + \mathrm{Q2} = \frac{\left(\frac{q_0}{3}\right)^2}{2\frac{3}{4}\mathrm{C}} + \frac{\left(\frac{2q_0}{3}\right)^2}{2\mathrm{C}}$$

Находя теплоты из уравнений, получаем соответственно:

$$\mathrm{Q}_1 = \frac{2q_0^2}{147\mathrm{C}}, \mathrm{Q}_2 = \frac{2q_0^2}{189C}$$

И в сумме ответ

$$\mathrm{Q} = \frac{32\mathrm{q}_0^2}{1323\mathrm{C}} \approx 0.02\frac{q_0^2}{C}$$

Разбалловка.

Отмечено что емкость нижнего конденсатора постоянна	1 балл
Записана емкость верхнего конденсатора до поворота пластин	2 балла
Получены заряды конденсаторов до поворота пластин	2 балла
Записана емкость верхнего конденсатора до первого полуповорота пластин	2 балла
Записан ЗСЗ (от начального состояния до первого полуповорота пластин), рассчитаны заряды пластин	3 балла

Из ЗСЭ получена теплота, выделившаяся за первый полуповорот пластин	4 балла
Из ЗСЭ получена теплота, выделившаяся за второй полуповорот пластин	4 балла
Получен ответ для полной теплоты	2 балла

Задача 5. Задача-оценка (механика-гидиро-динамика)

Условие (Парфеньев Владимир Михайлович) (20 баллов). Микроорганизмы перемещаются в водной среде за счет циклического изменения своей формы (например, движение жгутиков). Оцените, какое расстояние проплывет бактерия до полной остановки (после прекращения изменения своей формы), если ее размер $R\ =\ 1$ мкм, а скорость $u\ =\ 30$ мкм$/c$. Кинематическая вязкость воды $\nu = 10^{-2}$ см^2/с. Считайте, что при данных условиях тормозить бактерию будет сила, пропорциональная её скорости.

Решение. Во-первых, следует считать, что массовая плотность микроорганизма близка к плотности воды. Движение бактерии соответствует малым числам Рейнольдса, поэтому сила вязкого сопротивления будет пропорциональна скорости микроорганизма.

Оценим силу, действующую на микроорганизм по теории размерностей:

Важными параметрами в задаче будут являться плотность, вязкость воды, скорость и размер бактерии.

$$F{\sim}u^1\rho^\alpha\nu^\beta R^\gamma$$

Приравнивая степени размерностей слева и справа в верхнем выражении получаем систему уравнений на степени соответствующих величин:

$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ 1 = 1 - 3\alpha + 2\beta + \gamma \\ -2 = -1 - \beta \end{cases}$$

Откуда находим, что сила пропорциональна выражению

$$F{\sim}u^1\rho^1\nu^1R^1$$

Из второго закона Ньютона оценим ускорение бактерии за счет вязкой силы

$$\rho R^3 a \sim \rho\nu R u,$$

Где ρ – массовая плотность микроорганизма, a – его ускорение. Время до полной остановки оценивается как

$$T \sim \frac{u}{a} {\sim} \frac{R^2}{\nu}.$$

За это время бактерия сместится на

$$\Delta x \sim uT \sim \frac{uR^2}{\nu} = 0.3 \text{ Å}. \quad (1)$$

.

Разбалловка.

Указано, что плотность микроорганизма близка к плотности воды	2 балла
Указаны все параметры задачи, от которых зависит сила сопротивления	3 балла
Составлена система линейных уравнений, связывающая размерности величин, от которых зависит сила сопротивления	3 балла
Получена верная зависимость силы сопротивления от параметров задачи	2 балла
Записан 2 закон Ньютона	3 балла
Записано ускорение	2 балла
Записано время движения	2 балла
Вычислено расстояние, пройденное до остановки	3 балла