11 класс. Решения.

Каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Механика.

Условие (Галиуллин Арслан Анварович) (20 баллов). Плоский горизонтальный конвейер длиной $l = 1$ м движется с переменной скоростью $v(t)$. На начальный его конец из резервуара без начальной скорости высыпается песок с переменным массовым расходом $q(t)$. К концу движения по конвейеру песок не движется относительно ленты. В конце конвейера песок слетает с ленты без потери скорости. Верхняя лента контейнера находится на высоте $h = 5$ м относительно земли. Песчинки после слёта с ленты свободно летят и падают на землю без сопротивления воздуха. Определите максимальную линейную (на единицу длины) плотность упавшего на землю песка. Считайте, что песок при касании с землёй прилипает к ней, а песчинки такие маленькие, что никак не влияют на место падения других. Временные зависимости $q(t) = q_0 + \alpha t$, $v(t) = v_0 + \beta t + \gamma t^3$, где параметры $q_0 = 1$ кг/с, $\alpha = 100$ г/с^2, $v_0 = 5$ м/с, $\beta = 0.1$ м/с^2, $\gamma = 0.1$ мм/с^3. Время ограничено, $t < T$, где $T = 15$ с, после чего песок заканчивается.

Решение: Заметим, что время изменения в 2 раза величин $v(t)$ и $q(t)$ примерно равно 10 с. Это время намного больше времени движения песка по конвейеру:

$$10\ \text{с} \gg \frac{l}{v(0)} = 0.2\ \text{с},$$

так что можем решать задачу считая, что в каждый данный момент величины v и q постоянны.

Время, за которое песчинки падают на землю, считается по формуле

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1\ \text{с}.$$

Дальность полёта песчинки $L(t)$, вылетающей с ленты со скоростью $v(t)$ равна

$$L(t) = \tau \cdot v(t) = v(t)\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Заметим, что $L(t)$ вслед за $v(t)$ является возрастающей функцией времени. Это означает, что в разные моменты времени песок будет падать в разные положения. За промежуток времени $(t, t + dt)$ песчинки попадают в область

$$(L(t); L(t) + dL), \qquad dL = \frac{dL(t)}{dt}dt.$$

Масса этих песчинок, соответственно,

$$dM = q(t)dt.$$

Тогда плотность песчинок на земле будет равна

$$\lambda = \frac{dM}{dL} = \frac{q(t)}{dv(t)/dt}\cdot\frac{1}{\tau} = \sqrt{\frac{g}{2h}}\frac{q_0 + \alpha t}{\beta + 3\,\gamma\,t^2}, \qquad t = t(L).$$

Максимумом этой функции по времени является

$$\lambda_{max} = \sqrt{\frac{g}{2h}}\frac{3q_0 + \sqrt{9q_0^2 + \frac{3\alpha^2\beta}{\gamma}}}{6\beta} = 15 \text{ кг/м},$$

который достигается при времени

$$t_{max} = -\frac{q_0}{\alpha} + \sqrt{\frac{q_0^2}{\alpha^2} + \frac{\beta}{3\gamma}} \approx 10 \text{ с},$$

то есть до момента, когда песок закончился.

Разбалловка.

Н***айдено время падения песчинок с высоты конвеера***	***2 балла***
Написано выражение для определения линейной плотности	***2 балла***
Написано выражение для дальности полета песчинок в зависимости от скорости конвеера	***5 баллов***
Найден момент времени, когда плотность максимальна	***4 балла***
Найдено верное выражение для определения максимальной плотности	***3 балла***
Найдено верное численное значение для максимальной плотности	***4балла***

Задача 2. Термодинамика

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Абсолютно круглая и однородная планета покрыта слоем воды. Вследствие процессов радиоактивного распада в породе, из которой состоит планета, она медленно нагревается. Выделение тепла происходит равномерно во времени. Температура планеты в начальный момент измерения равна 5°C, в этот момент толщина слоя воды равна $H = 60$ м.

1. При какой температуре планеты вся вода испарится?
2. С момента, когда вся вода испарилась, наблюдения продолжались до момента, когда температура достигла $T_f = 180°C$. Какую долю тепла, выделившегося при радиоактивном распаде, вобрал в себя пар в результате этого процесса?

T, °C	P, МПа
5	0.007
100	0.1
120	0.2
134	0.3
144	0.4
152	0.5
159	0.6
165	0.7
170	0.8
175	0.9
180	1.0

В таблице приведена зависимость давления насыщенных паров воды от температуры.

Масса планеты равна массе Земли ($M = 6 \cdot 10^{24}$кг), радиус совпадает с радиусом Земли, $r = 6400$ км. Удельная теплоёмкость породы планеты $C_п = 0.5$ кДж/(кг · К). Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К). В каждый момент времени считать, что на планете установлено полное тепловое равновесие. Тепловым излучением планеты, расширением породы планеты при нагреве и потерей газа в космос пренебречь. При вычислениях приближённо считать, что давление насыщенного пара при 5°C равно нулю.

Решение. 1. Глубина слоя жидкости 60 м соответствует давлению 6 атмосфер или 0.6 МПа (поскольку масса и радиус планеты совпадают с земными, то и ускорение свободного падения на её поверхности то же самое). Вся вода испарится, когда давление насыщенных паров достигнет этого значения. Согласно таблице, это произойдёт при температуре $T_1 = 159°\text{C}$.

2. Далее нагрев каждого горизонтального слоя водяного пара происходит при постоянном давлении. Это означает, что его безразмерная теплоёмкость как трёх-атомного газа равна

$$c_p = 8.$$

Количества пепла $Q_п$ и $Q_в$, запасённые породой планеты и водяным паром, при нагреве от температуры T_1 до T_f, равны

$$Q_п = M \cdot C_п \cdot (T_f - T_1),$$

$$Q_в = \frac{c_p}{2} \nu R (T_f - T_1), \quad \nu = \frac{M_в[\text{г}]}{34}, \quad M_в = 4\pi r^2 H \rho_в,$$

где ν – количество молей водяного пара, $M_в$ – масса водяного пара ($M_в[\text{г}]$ – в граммах), $\rho_в = 1000$ кг/м^3 – плотность воды при земных условиях. В результате получаем

$$\frac{Q_в}{Q_п} = 10^{-5}.$$

Порядок этого отношения определяется отношением исходной глубины слоя воды и радиусом планеты, H/r.

Разбалловка.

Правильно сформулирован критерий испарения всей воды через давление насыщенных паров	3
Правильно оценено давление на планете	
Найдена температура T_1 при которой испарится вся вода	4
Найдена теплоемкость пара	1
Получено выражение для количества тепла, запасенного планетой при нагреве от T_1 до T_f	3
Получено выражение для количества тепла, запасенного паром при нагреве от T_1 до T_f	3
Получено правильное численное значение отношения двух количеств теплоты	4

Задача 3. Электродинамика

Задача 3 (Галиуллин Арслан Анварович) (20 баллов). 1) Определите максимальный ток, протекающий через диод D1, изображённый на Схеме 1. Нижний контакт схемы заземлён, а на верхний подаётся переменное напряжение $U_0(t) = V_0 \sin \omega t$, где $V_0 = 10$ В, $\omega = 2\pi$ кГц. Индуктивность катушки $L_1 =$ 100 мГн, вольт-амперная характеристика диода изображена на рисунке, напряжение открытия диода $V_D = 3$ В. В момент $t = 0$ ток через катушку не проходил.

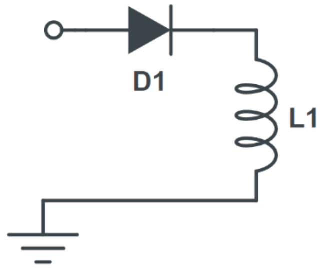


Схема 1

Напомним вам правило взятия определённого интеграла от синуса:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sin \omega t \; dt = \frac{1}{\omega}(\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2).$$

2) К предыдущей схеме добавили бесконечное число подобных элементов. Определите максимальную сумму напряжений на катушках. Напряжение на верхнем левом контакте схемы $U_0(t) = V_0 \sin \omega t$, в начальный момент времени токи через каждую катушку равны нулю.

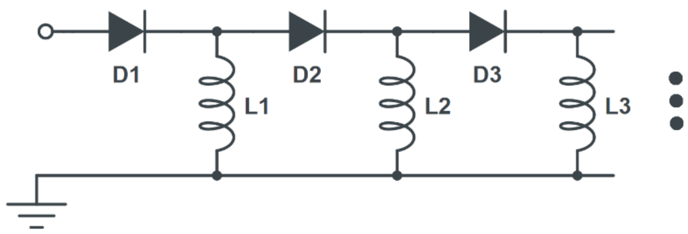
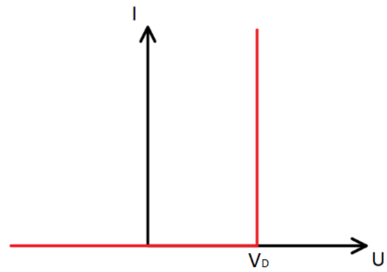
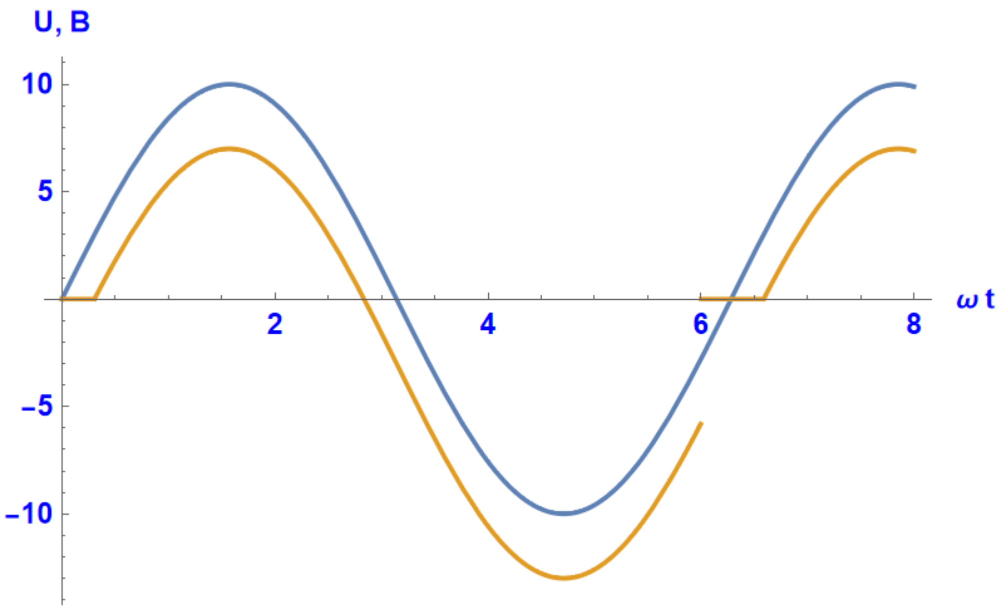


Схема 2

Все диоды и катушки одинаковые, имеют параметры такие же, как в первом пункте задачи.



Решение. 1) Нарисуем на графике зависимости напряжений источника и напряжений на катушке от времени:



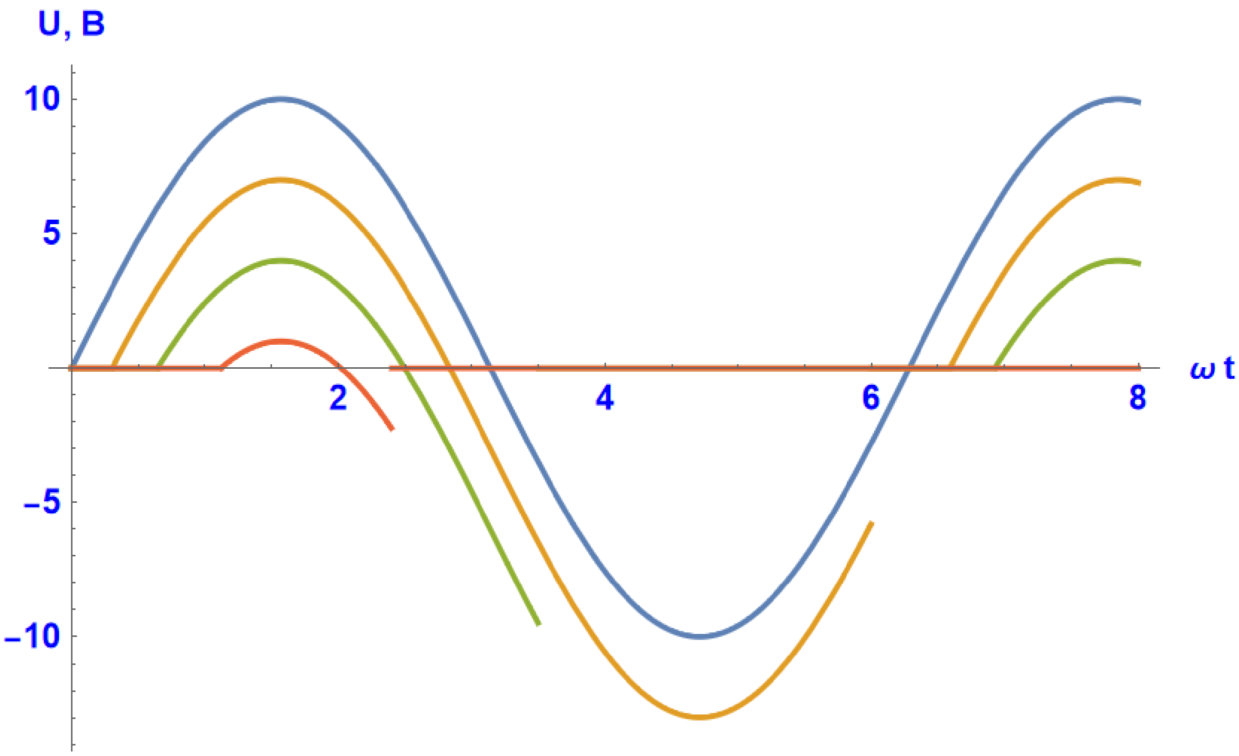
Синим цветом на графике обозначено напряжение источника в зависимости от обезразмеренного времени, оранжевым – напряжение на катушке. Ясно, что до тех пор, пока напряжение на диоде не станет равным напряжению открытия диода, напряжение на катушке будет равно нулю и ток через неё будет нулевым. После открытия диода напряжение на катушке будет равняться $V_0 \sin \omega t - V_D$ и ток будет нарастать до тех пор, пока напряжение на катушке положительно. Напряжение на катушке будет положительным до тех пор, пока открыт диод. После того, как напряжение на катушке обнулится, рост тока прекратится, но ток будет продолжать течь через катушку. Так как ток через катушку течёт, то он течёт и через диод. Поэтому напряжение на катушке и после обнуления напряжения на ней будет равно $V_0 \sin \omega t - V_D$. Вольт-амперная характеристика диода не позволяет напряжению падать на диоде на значение большее, чем V_D. Если же на диоде после обнуления напряжения на катушке падает напряжение меньшее V_D, то ток через диод прекращается, то есть прекращается и ток через катушку, что приводит к ЭДС индукции приводящей к уменьшению потенциала точки, соединяющей диод и катушку, что выравнивает падение напряжения на диоде на уровне V_D, так что утверждение в предыдущем предложении верно. Далее, после обнуления напряжения на катушке, напряжение на ней становится отрицательным и ток начинает уменьшаться. Ток успеет уменьшиться до нуля до того, как начнётся следующий период синусоиды, что видно из графика. Таким образом, максимальный ток через диод определяется интегралом по первой половины синусоиды от напряжения на катушке. Запишем уравнение на ток в промежутке роста тока:

$$L_1 \dot{I}_1 = V_0 \sin \omega t - V_D$$

Границы этого промежутка определяются уравнением $V_0 \sin \omega t - V_D = 0$. Интегрируя уравнение на ток в найденных пределах роста, получаем максимальный ток в системе, равный

$$\frac{2V_0 \sqrt{1 - \frac{V_D^2}{V_0^2}} - 2\, V_D \arcsin \frac{V_D}{V_0}}{L_1\, \omega} = 0{,}18 \text{ А}$$

2) По аналогии с предыдущим пунктом задачи, получаем, что зависимость напряжения на каждой катушке от времени отличается от напряжения:



На графике представлены зависимости напряжений от времени: синий – источника, оранжевый – первой катушки, зелёный – второй, красный – третьей. Видно, что ток будет течь только через первые три катушки (напряжение на четвёртой всегда нулевое), так что максимальная сумма напряжений на всех катушках будет равна сумме напряжений на первых трёх катушках, то есть ответ 10В – 3В + 10В – 3В -3В + 10В – 3В -3В -3В = 12В.

.

Разбалловка.

Найдены диапазоны времени ненулевого напряжения для одной катушки	3
Найдена зависимость тока от времени на одной катушке	3
Получен верный ответ на 1 пункт задачи	3
Получены зависимости для напряжения от времени для катушек с разными номерами	3
Определено число катушек с ненулевым током	2
Получено максимальное напряжение на каждой катушке	4
Правильно вычислена сумма напряжений	2

Задача 4. Оптика

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Источник света, испускающий два луча под малым углом $\alpha = 5°$ друг к другу, перемещается по кругу, оставаясь на одном расстоянии от оптической оси собирающей линзы. Направления лучей всегда остаются неизменными, каждый из лучей направлен под малым углом к оптической оси. За линзой поставили экран, наклоненный под углом $\beta = 4°$ к оптической оси. Перемещением экрана вдоль оптической оси добились того, что один из лучей всегда попадает в одну точку, а другой описывает круг с радиусом $r = 0.3$ мм. Найдите радиус круга R, по которому движется источник света.

Решение. Пусть F – фокусное расстояние линзы, а оба данных угла выражены в радианах:

$$\alpha = 0.087, \qquad \beta = 0.070.$$

Каждый из лучей, будучи преломлённым линзой, всегда проходит через одну и ту же точку в фокальной плоскости (будем называть эти две точки точками фокусировки). Пусть расстояние между этими точками равно d. Имеем соотношение

$$d = \alpha F.$$

Собираясь в соответствующую точку фокусировки, каждый луч описывает конус с углом раствора

$$\gamma = \frac{R}{F}.$$

Расстояние δ от одной из точек фокусировки до экрана равно

$$\delta = \beta d,$$

поэтому радиус круга, который луч описывает на экране, равен

$$r = \gamma\delta = \alpha\beta R.$$

В итоге получаем, что

$$R = \frac{r}{\alpha\,\beta} = 4.9 \text{ см}.$$

Разбалловка.

Найдены значения углов в радианах	1
Определены точки фокусировки для обоих лучей	3
Найдено выражение для расстояния между точками фокусировки двух лучей	3
Описана траектория каждого луча во времени и ее параметры	4
Найдено расстояние от точки фокусировки до экрана	3

Найдено выражение для радиуса траектории источника света	3
Верно посчитано значение радиуса траектории источника света	3

Задача 5. Задача-оценка (механика-гидродинамика)

Условие (Парфеньев Владимир Михайлович) (20 баллов). Микроорганизмы перемещаются в водной среде за счет циклического изменения своей формы (например, движение жгутиков). Оцените, какое расстояние проплывет бактерия до полной остановки (после прекращения изменения своей формы), если ее размер $R = 1$ мкм, а скорость $u = 30$ мкм$/c$. Кинематическая вязкость воды $\nu = 10^{-2}$ см^2/с. Считайте, что при данных условиях тормозить бактерию будет сила, пропорциональная её скорости.

Решение. Во-первых, следует считать, что массовая плотность микроорганизма близка к плотности воды. Движение бактерии соответствует малым числам Рейнольдса, поэтому сила вязкого сопротивления будет пропорциональна скорости микроорганизма.

Оценим силу, действующую на микроорганизм по теории размерностей:

Важными параметрами в задаче будут являться плотность, вязкость воды, скорость и размер бактерии.

$$F \sim u^1 \rho^\alpha \nu^\beta R^\gamma$$

Приравнивая степени размерностей слева и справа в верхнем выражении получаем систему уравнений на степени соответствующих величин:

$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ 1 = 1 - 3\alpha + 2\beta + \gamma \\ -2 = -1 - \beta \end{cases}$$

Откуда находим, что сила пропорциональна выражению

$$F \sim u^1 \rho^1 \nu^1 R^1$$

Из второго закона Ньютона оценим ускорение бактерии за счет вязкой силы

$$\rho R^3 a \sim \rho \nu R u,$$

Где ρ – массовая плотность микроорганизма, a – его ускорение. Время до полной остановки оценивается как

$$T \sim \frac{u}{a} \sim \frac{R^2}{\nu}.$$

За это время бактерия сместится на

$$\Delta x \sim uT \sim \frac{uR^2}{\nu} = 0.3 \text{ А}. \qquad (1)$$

.

Разбалловка.

Указаны все параметры задачи, от которых зависит сила торможения	3
Получена верная зависимость силы сопротивления от параметров задачи	3
Записан 2 закон Ньютона для тела под действием силы вязкого трения	3
Получена оценка ускорения от параметров задачи	3
Получена оценка времени до остановки как характерной скорости поделенной на ускорение	3
Получена оценка расстояния, пройденного бактерией до остановки как скорости умноженной на характерное время	3
Получен верный порядок ответа	2