

Время выполнения заданий — 240 минут.

Максимальное количество баллов — 100.

Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк. Проверяться будут как ответ в бланке, так и черновые записи.

Задача 1. (максимум 20 баллов). Плоский горизонтальный конвейер длиной $l = 1$ м движется с переменной скоростью $v(t)$. На начальный его конец из резервуара без начальной скорости высыпается песок с переменным массовым расходом $q(t)$. К концу движения по конвейеру песок не движется относительно ленты. В конце конвейера песок слетает с ленты без потери скорости. Верхняя лента контейнера находится на высоте $h = 5$ м относительно земли. Песчинки после слёта с ленты свободно летят и падают на землю без сопротивления воздуха. Определите максимальную линейную (на единицу длины) плотность упавшего на землю песка. Считайте, что песок при касании с землёй прилипает к ней, а песчинки такие маленькие, что никак не влияют на место падения других. Временные зависимости $q(t) = q_0 + \alpha t$, $v(t) = v_0 + \beta t + \gamma t^3$, где параметры $q_0 = 1$ кг/с, $\alpha = 100$ г/с², $v_0 = 5$ м/с, $\beta = 0.1$ м/с², $\gamma = 0.1$ мм/с⁴. Время ограничено, $t < T$, где $T = 15$ с, после чего песок заканчивается.

Задача 2. (максимум 20 баллов). Абсолютно круглая и однородная планета покрыта слоем воды. Вследствие процессов радиоактивного распада в породе, из которой состоит планета, она медленно нагревается. Выделение тепла происходит равномерно во времени. Температура планеты в начальный момент измерения равна 5°C , в этот момент толщина слоя воды равна $H = 60$ м.

1. При какой температуре планеты вся вода испарится?
2. С момента, когда вся вода испарилась, наблюдения продолжались до момента, когда температура достигла $T_f = 180^\circ\text{C}$. Какую долю тепла, выделившегося при радиоактивном распаде, вобрал в себя пар в результате этого процесса?

T, °C	P, МПа
5	0.007
100	0.1
120	0.2
134	0.3
144	0.4
152	0.5
159	0.6
165	0.7
170	0.8
175	0.9
180	1.0

В таблице приведена зависимость давления насыщенных паров воды от температуры. Масса планеты равна массе Земли ($M = 6 \cdot 10^{24}$ кг), радиус совпадает с радиусом Земли, $r = 6400$ км. Удельная теплоёмкость породы планеты $C_{\text{п}} = 0.5$ кДж/(кг · К). Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль · К). В каждый момент времени считать, что на планете установлено полное тепловое равновесие. Тепловым излучением планеты, расширением породы планеты при нагреве и потерей газа в космос пренебречь. При вычислениях приближённо считать, что давление насыщенного пара при 5°C равно нулю.

Задача 3. (максимум 20 баллов). 1) Определите максимальный ток, протекающий через диод D1, изображённый на схеме 1. Нижний контакт схемы заземлён, а на верхний подаётся переменное напряжение $U_0(t) = V_0 \sin \omega t$, где $V_0 = 10$ В, $\omega = 2\pi$ кГц. Индуктивность катушки $L_1 = 100$ мГн, вольт-амперная характеристика диода изображена на рисунке 1, напряжение открытия диода $V_D = 3$ В. В момент $t = 0$ ток через катушку не проходил.

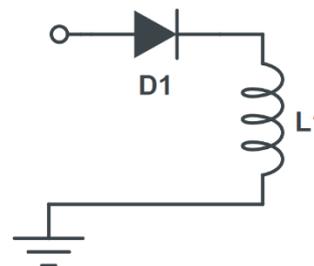


Схема 1

Напомним вам правило взятия определённого интеграла от синуса:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sin \omega t \, dt = \frac{1}{\omega} (\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2).$$

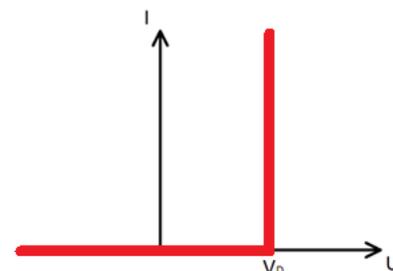


Рис. 1

2) К предыдущей схеме добавили бесконечное число подобных элементов (схема 2). Определите максимальную сумму напряжений на катушках. Напряжение на верхнем левом контакте схемы $U_0(t) = V_0 \sin \omega t$, в начальный момент времени токи через каждую катушку равны нулю.

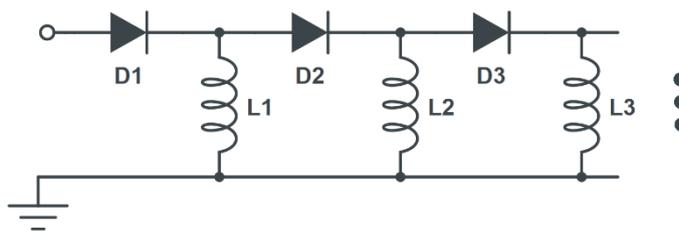


Схема 2

Все диоды и катушки одинаковые, имеют параметры такие же, как в первом пункте задачи.

Задача 4. (максимум 20 баллов). Источник света, испускающий два луча под малым углом $\alpha = 5^\circ$ друг к другу, перемещается по кругу, оставаясь на одном расстоянии от оптической оси собирающей линзы. Направления лучей всегда остаются неизменными, каждый из лучей направлен под малым углом к оптической оси. За линзой поставили экран, наклоненный под углом $\beta = 4^\circ$ к нормали к оптической оси. Перемещением экрана вдоль оптической оси добились того, что один из лучей всегда попадает в одну точку, а другой описывает круг с радиусом $r = 0.3$ мм. Найдите радиус круга R , по которому движется источник света.

Задача 5. (максимум 20 баллов). Микроорганизмы перемещаются в водной среде за счет циклического изменения своей формы (например, движение жгутиков). Оцените, какое расстояние проплывет бактерия до полной остановки (после прекращения изменения своей формы), если ее размер $R = 1$ мкм, а скорость $u = 30$ мкм/с. Кинематическая вязкость воды $\nu = 10^{-2}$ см²/с. Считайте, что при данных условиях тормозить бактерию будет сила, пропорциональная её скорости.