10 класс. Решения.

Каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

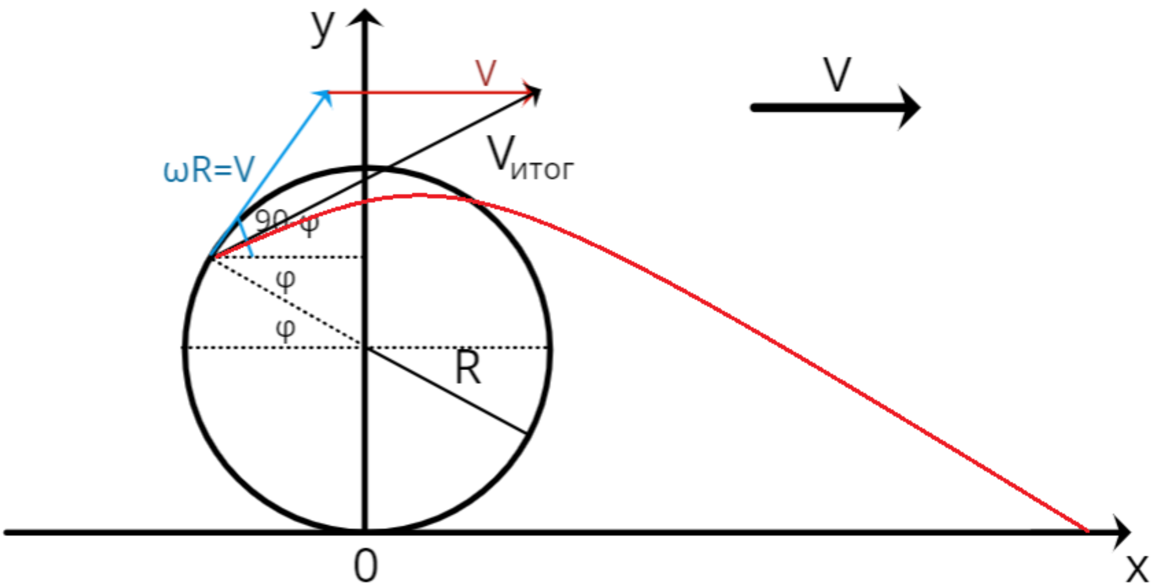
Задача 1. Кинематика.

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). Колесо радиусом R катится по горизонтальной дороге без проскальзывания с постоянной скоростью $V = \sqrt{2Rg}$, где g — ускорение свободного падения. На поверхности качения колеса имеется маленькая капля краски, которая в некоторый момент времени отлетает от колеса. Определите на какую максимальную возможную высоту относительно земли сможет подняться данная капля. На каком расстоянии от точки отлета приземлится данная капля в этом случае? Считайте, что обратно на колесо капля попасть не может, поскольку она в полёте уходит из его плоскости (но в остальным этим движением по поперечном направлении можно пренебречь).

Решение.

1) Отметим, что при движении колеса без проскальзывания полная скорость капель краски складывается из векторной суммы поступательной скорости V и вращательной скорости $\omega R = V$.

2) Теперь определим на каком максимальном расстоянии по оси y может оказаться капля краски. Для этого рассмотрим произвольную точку:



Время подъема до верхней точки составит:

$$t_{\text{под}} = \frac{V_y}{g} = \frac{V\sin(90-\varphi)}{g} = \frac{V\cos\varphi}{g}$$

Высота подъёма относительно точки вылета:

$$h = \frac{{V_y}^2}{2g} = \frac{(V\cos\varphi)^2}{2g} = \frac{V^2\cos^2\varphi}{2g}$$

Высота подъёма относительно поверхности:

$$H = h + R(1+\sin\varphi) = \frac{V^2\cos^2\varphi}{2g} + R(1+\sin\varphi) = \frac{V^2(1-\sin^2\varphi)}{2g} + R(1+\sin\varphi)$$

Не сложно заметить, что это квадратное уравнение будет иметь максимум при:

$$\sin\varphi = \frac{gR}{V^2} = \frac{1}{2}$$

Получим, что максимальная высота подъёма относительно земли составит:

$$H = 2{,}25R$$

3) Теперь определим расстояние, которое пролетит по оси x данная капля. Для этого нам необходимо будет найти время падения капли от верхней точки до земли:

$$t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{4{,}5R}{g}}$$

Расстояние по оси x получится:

$$S_x = V_x t_{\text{пол}} = (V + V\cos(90-\varphi))\big(t_{\text{пад}} + t_{\text{под}}\big) = 1{,}5V\left(\sqrt{\frac{4{,}5R}{g}} + \sqrt{\frac{1{,}5R}{g}}\right)$$

$$S_x = \frac{3\big(3+\sqrt{3}\big)}{2}R$$

4) Теперь определим перемещение данной капли от точки отрыва от колеса до точки приземления:

$$|S_y| = R(1+\sin\varphi) = 1{,}5R$$

$$L = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = 7{,}25R$$

Разбалловка.

Указано условие движения без проскальзывания	1 балла
Верно указана векторная сумма скорости поступательного и вращательного движения точки на колесе	2 балла

Найдена проекция полной скорости на вертикальную ось	2 балла
Записана формула высоты подъема при баллистическом движении	1 балл
Записана формула высоты подъема капли относительно земли в зависимости от одного параметра	3 балла
Правильно определен максимум этой функции	3 балла
Правильно определена максимальная высота подъема капли	2 балла
Правильно определено смещение по оси x для капли	3 балла
Правильно определено расстояние от точки отрыва до до точки приземления	3 балла

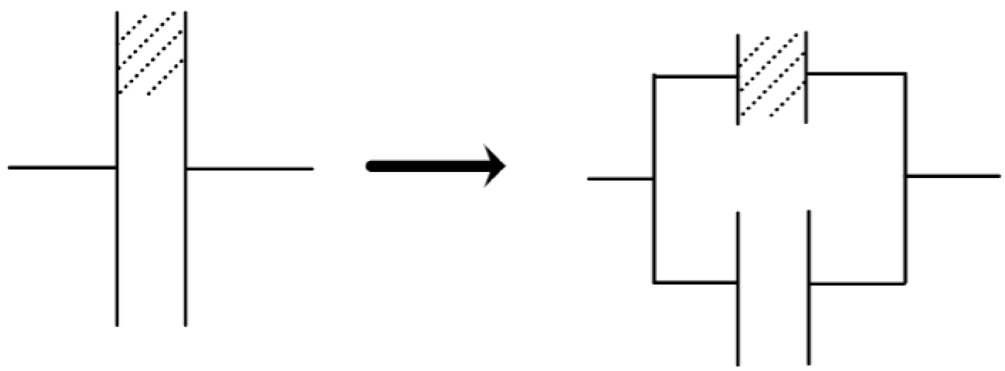
Задача 2. Электричество.

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). Имеется RC-контур, состоящий из плоского конденсатора и резистора с постоянным сопротивлением R. Если внутрь данного конденсатора поместить пластину, пропитанную этиловым спиртом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 27$, то характерное время разрядки увеличится вдвое. Определите во сколько раз изменится характерное время разрядки конденсатора, если поместить такую же пластину в то же положение, пропитанную водой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 81$. Считать, что толщина пластины совпадает с расстоянием между обкладками конденсатора.

Решение:

1) Отметим, что характерное время разрядки конденсатора выражается, как $\tau = RC$. Так как время поменялось не в 27 раз, то пластина занимает не полную площадь конденсатора.

2) Если толщина пластины совпадает с толщиной конденсатора, то частично заполненный конденсатор всегда можно представить, как параллельное соединение между заполненным конденсатором и незаполненным:



3) Пусть S – площадь пластин конденсатора, а d – расстояние между обкладками конденсатора. Определим площадь S_1, которую занимает пластина в конденсаторе:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$2C = \frac{2\varepsilon_0 S}{d} = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_0\ (S - S_1)}{d}$$

$$S_1 = S/(\varepsilon_1 - 1)$$

4) Теперь определим ёмкость для случая, когда пластина пропитана водой:

$$C_{\text{итог}} = C_3 + C_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_0 (S - S_1)}{d} = \left(\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 - 2}{\varepsilon_1 - 1}\right) C = \frac{107}{26} C \approx 4{,}1C$$

5) Получается, что ёмкость конденсатора увеличится в 4,1 раза, значит и время разрядки тоже увеличится в 4,1 раза.

Разбалловка.

Правильно отмечено, что характерное время разрядки конденсатора зависит линейно от ёмкости	2 балла
Правильно отмечено, что конденсатор частично заполнен пластиной	1 балл
Правильно отмечено, что частично заполненный конденсатор можно представить, как параллельное соединение конденсаторов	2 балла
Записана формула плоского конденсатора	3 балла
Правильно определена какая часть конденсатора заполнена пластиной	2 балла
Верно выражена ёмкость для 1 случая	4 балла
Верно выражена ёмкость для 2 случая	4 балла
Итоговый ответ для времени	2 балла

Задача 3. Электричество.

Условие () (20 баллов). Электрическая схема состоит из последовательно соединенных между собой источника с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В , сопротивления $R = 300$ КОм, и конденсатора с плоскими пластинами. Площадь пластин составляет $S = 1.13$ м^2. Одна из пластин может совершать поступательное периодическое во времени движение от/к противоположной пластины под воздействием проходящей звуковой волны, так что расстояние d между пластинами при определённой интенсивности звука задаётся выражением $d = d_0(1 + \alpha\cos(\omega t))$, где $d_0 = 1$мм, степень отклонения от равновесного положения пластины $\alpha = 0.1$, ω — циклическая частота звука, t — время. Какое тепло будет выделяться на резисторе, если линейная частота звуковой волны составляет

1. 10 Гц?
2. 10 кГц?

Решение:

Для решения задачи заметим, что исследуемые периоды колебаний пластинок конденсатора сильно отличаются в разные стороны от типичного времени релаксации системы $\tau = RC =$ 3 мс: Т (10Гц) = 100 мс, Т(10кГц) = 0.1 мс.

При медленном колебании пластинки, таким образом, можно считать, что в каждый момент времени система находится в электрическом равновесии. В стационарном приближении для определения тока, текущего через резистор, можно считать, что на конденсаторе напряжение равно ЭДС батарейки. В таком случае заряд на обкладках

$$\mathrm{q} = \mathrm{C}\mathcal{E} = \mathcal{E}\,\frac{S\,\mathcal{E}_0}{d_0(1+\alpha\cos\omega t)}$$

$$\approx \frac{\mathcal{E}\,S\,\mathcal{E}_0}{d_0}(1-\alpha\cos\omega t), \quad \text{для малых } \alpha$$

Тогда ток, проходящий через резистор, равный производной от заряда, равен:

$$I = \frac{\mathcal{E}\,S\,\mathcal{E}_0}{d_0}\alpha\omega\sin\omega t$$

А выделяемая на резисторе мощность будет равна

$$P = \left(\frac{\mathcal{E}\,S\,\mathcal{E}_0}{d_0}\alpha\omega\right)^2\sin^2\omega t\,R$$

При усреднении по периоду получаем ответ для первого пункта задачи:

$$< P >= \frac{\left(\frac{\mathcal{E}\,S\,\mathcal{E}_0}{d_0}\alpha\omega\right)^2}{2}R = 6\cdot 10^{-8}\text{Вт}$$

При быстром движении обкладок система не будет находиться в равновесном состоянии в каждый момент времени. Для быстрого перемещения можно считать, что меняется слабо заряд на конденсаторе: $\mathrm{q(t)} = \mathrm{q_0} + \beta(\mathrm{t})$. Тогда мощность на конденсаторе можно посчитать как

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{U_R^2}}{\mathrm{R}}$$

Где

$$\mathrm{U_R} = \mathcal{E} - \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} - \big(q_0 + \beta(t)\big)\frac{d_0(1+\alpha\cos\omega t)}{S\,\mathcal{E}_0} =$$

$$= \mathcal{E} - \frac{q_0 d_0}{S\,\mathcal{E}_0} - \frac{q_0\alpha\cos\omega t + \beta(t) + \beta(t)\alpha\cos\omega t}{S\,\mathcal{E}_0}d_0$$

Первые два члена суммы сокращаются по определению d_0. Последним членом, естественно, можно пренебречь из-за его малости. Тогда напряжение на резисторе будет определяться как

$$U_R = -\frac{q_0 \alpha \cos \omega t + \beta(t)}{S\, \mathcal{E}_0} d_0$$

Было бы здорово выкинуть второй член выражения. Для этого нужно показать, что $\beta(t)/q_0 \ll \alpha$. Оценим, какой заряд может стечь с конденсатора через резистор за период колебаний системы. Предположим, что батарейка отсутствует и конденсатор замкнут на себя через резистор. Тогда ток через резистор можно оценить сверху как $\mathcal{E}/R$, а заряд как $\mathcal{E}/R\ \cdot 1/f\ = 3\ \cdot 10^{-9}$ Кл. При этом, $q_0\, \alpha = 10^{-8}$ Кл. В таком случае, членом $\beta(t)$ можно пренебречь для расчёта мощности. Тогда

$$P = \frac{U_R^2}{R} = \left(\frac{q_0 \alpha \cos \omega t}{S\, \mathcal{E}_0} d_0\right)^2 /R$$

И средняя мощность резистора для второго пункта

$$< P >= \frac{(\mathcal{E}\, \alpha)^2}{2R} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Вт}$$

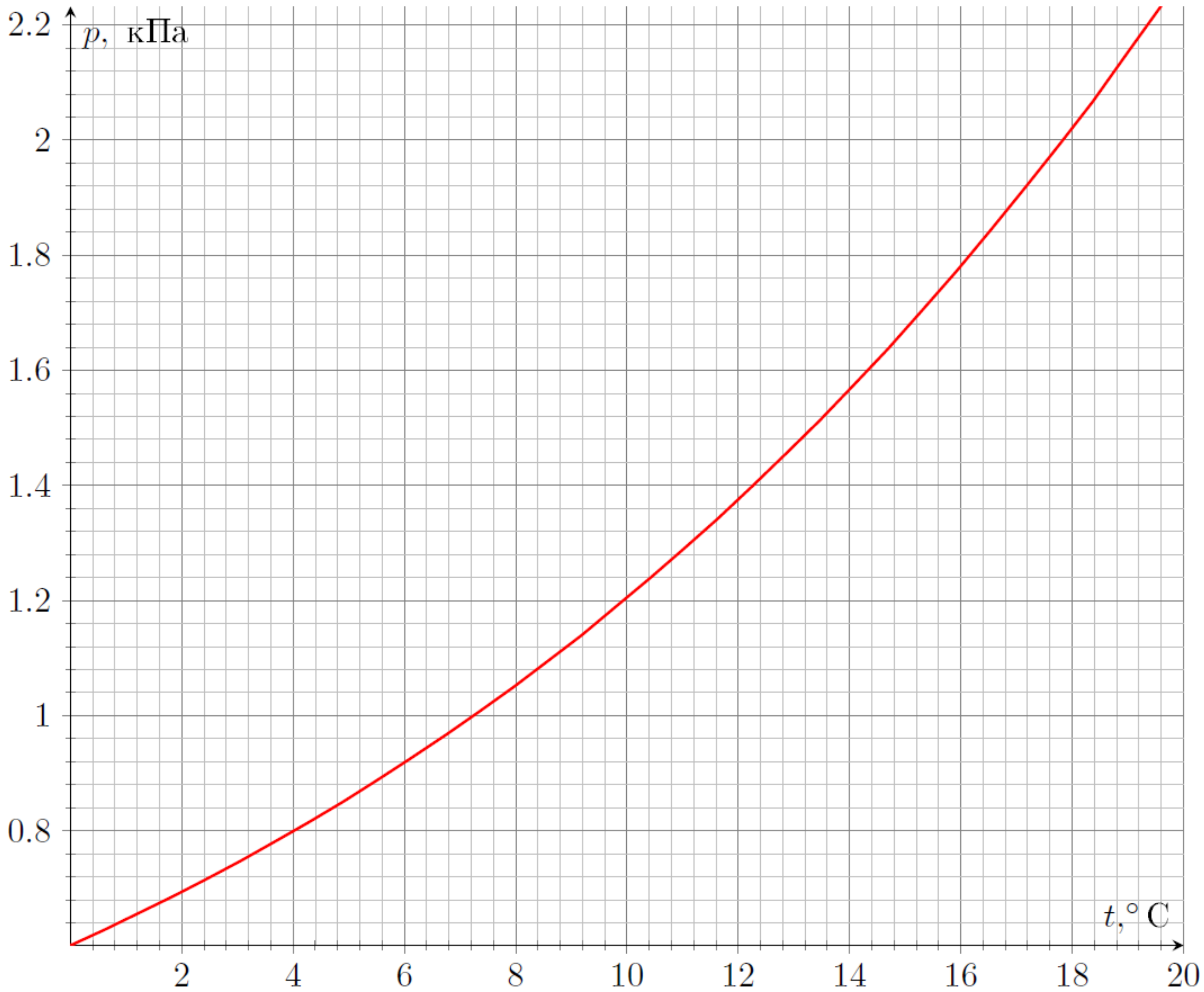
Разбалловка.

Подсчитано время релаксации системы	2 балла
Явно указано применение используемого приближения для решения первого пункта задачи	4 балла
Явно указано применение используемого приближения для решения второго пункта задачи	4 балла
Определена зависимость заряда на конденсаторе или тока через резистор от времени для первого пункта задачи	2 балла
Определена мощность, выделяемая на резисторе (мгновенная или средняя) в первом пункте задачи	3 балла
Определено напряжение на резисторе для второго пункта задачи	2 балла
Определена мощность, выделяемая на резисторе (мгновенная или средняя) во втором пункте задачи	3 балла

Задача 4. МКТ.

(Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). Студент Алексей, находящийся в замкнутой теплоизолированной комнате, для увеличения относительной влажности воздуха решил вскипятить воду в чайнике. Теплоёмкость сухого воздуха постоянна и равна $c = 1$ кДж/кг $\cdot$ К, плотность сухого воздуха постоянна и равна $\rho = 1{,}2$ кг/м^3, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/К $\cdot$ моль, удельная теплота парообразования воды $L =$

2,3 МДж/кг. КПД такого увлажнителя, определяемый как доля энергии, идущая на испарение воды, относительно потребляемой чайником энергии, равен 46%. График зависимости давления насыщенных водяных паров от температуры предоставлен на Рисунке. Определите, при каких температурах в комнате такой увлажнитель будет увеличивать относительную влажность в комнате. Теплоёмкостью стен, пола и потолка комнаты пренебречь.



Решение:

1) Относительная влажность воздуха выражается, как:

$$\varphi = \frac{\rho_{\text{в.п.}}(T)}{\rho_{\text{нас.п.}}(T)} \cdot 100\%$$

2) При работе испарителя происходит сразу два процесса: испарение воды и нагрев комнаты. Испарением воды без кипения можно пренебречь, так как вода из чайника без кипения испаряется медленно. Так как при росте температуры происходит и рост плотности насыщенных водяных паров, то начиная с некоторой температуры увеличение плотности насыщенных водяных паров будет больше, чем увеличение плотности водяного пара в комнате и относительная влажность будет уменьшаться. Запишем уравнения теплого баланса для данных процессов:

$$L\Delta\rho_{\text{в.п.}}V = \eta N\Delta t$$

$$c\rho V\Delta T = (1-\eta)N\Delta t$$

$$\frac{\Delta\rho_{\text{в.п.}}}{\Delta T} = \frac{c\rho\eta}{L(1-\eta)}$$

В этих уравнениях мы пренебрегли теплоёмкостью водяного пара, как малую долю от теплоты парообразования.

3) Теперь воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона для перевода плотности в давление:

$$PV = \nu RT$$

$$P = \frac{\rho}{\mu}RT$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{\Delta\rho_{\text{в.п.}}}{\Delta T}\cdot\frac{RT}{\mu} = \frac{RTc\rho\eta}{\mu L(1-\eta)} \approx 60\,\frac{\text{Па}}{\text{К}}$$

Данный коэффициент угла наклона графика соответствует температуре порядка 5°C. Значит при температуре ниже 5°C увлажнитель воздуха будет понижать относительную влажность воздуха.

Разбалловка.

Отмечена причина понижения относительной влажности при работе увлажнителя	3 балла
Записано уравнение теплового баланса при нагреве комнаты	4 балла
Записано уравнение теплового баланса при кипении воды	4 балла
Записано уравнение Менделеева-Клапейрона для перевода плотности в давление	2 балла
Правильно определен коэффициент угла наклона для графика давления от температуры	4 балла
Ответ попал в диапазон $[3-7]$°C	1 балл
Ответ попал в диапазон $[4-6]$°C	2 балла

Задача 5. Механика.

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Пузырёк с азотом находится в воде, давление в которой в области расположения пузырька можно принять равным атмосферному. Радиус пузырька равен 0.5 см. Оцените частоту сферически-симметричных колебаний формы пузырька, сопровождаемых изменением его объёма. Эффектами, связанными с всплыванием пузырька под действием силы Архимеда, пренебречь.

Решение: Для решения задачи будем пользоваться методом размерностей. Заметим, что ответ может (но не обязан) зависеть от следующих величин: радиус пузырька r, плотность азота ρ_{N_2}, плотность воды ρ_{H_2O}, атмосферное давление p_{atm}, поверхностное натяжение воды σ, ускорение свободного падения g.

Из такого набора параметров можно составить сколько угодно большое количество чисел с размерностью частоты. Заметим, однако, что некоторые параметры не оказывают влияния на резонансную частоту колебания пузырька. Действительно, ускорение свободного падения действует на все части системы одинаковым образом и не оказывает влияния на частоту колебаний. Аналогично, поверхностное натяжение не оказывает большого эффекта на резонансную частоту колебаний, которая определяется как баланс кинетической и потенциальной энергии движения воды в процессе колебания. Энергия поверхностного натяжения, в первом приближении, не вносит вклад в потенциальную энергию воды. Плотность азота при заданном давлении и радиусе пузырька также не должна оказывать влияния на частоту колебаний: действительно, колеблющимся объектом в задаче является именно вода, а в качестве силы, зависящей от обобщённой координаты в колебаниях, выступает изменяющееся произведение давления пузырька на его площадь; при политропном процессе колебания пузырька (адиабатическом или изотермическом) давление и объём пузырька связаны друг с другом без участия плотности газа формулой типа $pV^n = const$.

Таким образом, ответ должен зависеть только от плотности воды, атмосферного давления и радиуса пузырька.

Запишем уравнение на размерности:

$$f = k \cdot \rho_{H_2O}^{\alpha} \cdot p_{atm}^{\beta} \cdot r^{\gamma}$$

Где k – некоторый численный коэффициент порядка единицы.

Иначе, уравнение можно записать как уравнение на размерности входящих в него величин:

$$\text{с}^{(-1)} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}^{\alpha} \cdot \frac{\text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\text{м}^2}^{\beta} \cdot \text{м}^{\gamma}$$

Записывая уравнение на равенство степеней у соответствующих размерностей (с, м, кг), получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -1 = -2\beta, \text{для секунды} \\ 0 = -3\alpha - \beta + \gamma, \text{для метра} \\ 0 = \alpha + \beta, \text{для килограмма} \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$f = k \cdot \rho^{-1/2}{}_{H_2O} \cdot p_{atm}^{1/2} \cdot r^{-1}$$

Предполагая, что численный коэффициент слабо отличается от единицы и подставляя известные величины для атмосферного давления, плотности воды и радиуса пузырька, получаем **ответ**:

$$f \approx 2000 \text{ Гц}$$

Разбалловка.

Описаны все параметры системы, от которых зависит ответ	3 балла

Из множества описанных параметров верно и обоснованно выбраны три параметра, от которых зависит ответ	5 баллов
Записана система уравнений для показателей степеней зависимости	5 балла
Получено решение системы уравнений на показатели степеней	2 балла
Получена верная численная оценка ответа	5 баллов