11 класс. Решения.

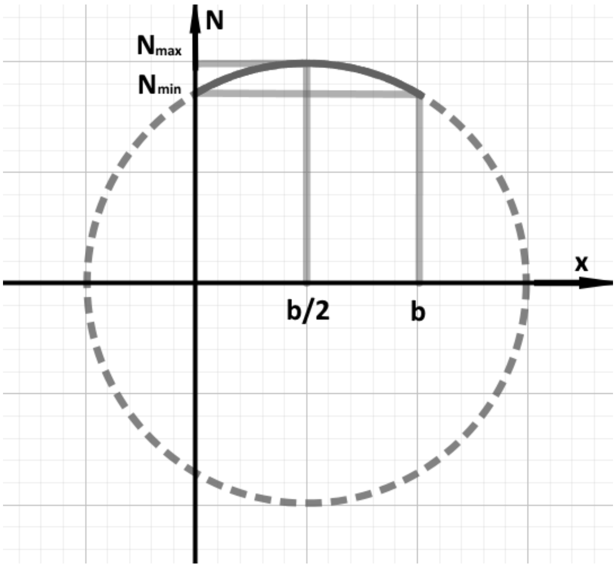
Каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Механика.

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). Майли решает соблюдать диету и регулярно измерять свой вес на обычных весах. Однако её внимание привлекает неожиданная зависимость показаний весов от их расположения в комнате. Оказывается, это связано с неровностью пола. Во время заливки пола в её квартире Майли следила за горизонтальностью только в одном направлении, что привело к интересному эффекту. Пол вдоль любой прямой, перпендикулярной одной паре стен, оказался горизонтальным, а вдоль прямой, перпендикулярной другой паре стен, – произвольной формы.

Майли провела серию экспериментов и измерила зависимость показаний весов от положения в двух комнатах, представив результаты на графиках.

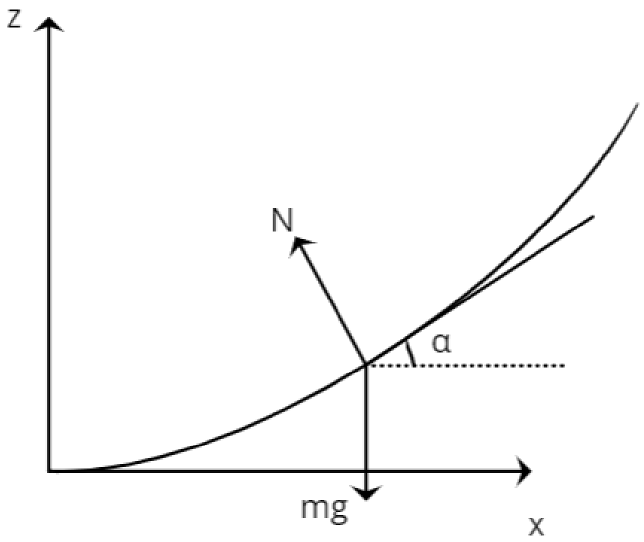
1) В первой комнате график зависимости показаний весов N от расстояния x до одной стены представляет собой дугу окружности, см. рис. Диаметр этой окружности на графике вдоль оси x составляет 10 м, а её диаметр вдоль оси N равен 1400 Н. Максимальный вес достигается в центре комнаты. Для упрощения решения задачи считайте известным, что профиль пола в этой комнате является поверхностью цилиндра, а самое низкое место пола находится в центре комнаты.
2) Во второй комнате зависимость показаний весов N от расстояния x до стены комнаты оказалась постоянной и равной N_{min}.



Определите, для какой комнаты и во сколько раз девочке Майли потребуется больше бетона для выравнивания полов до горизонтального уровня. Максимальные и минимальные показания весов в первой комнате соответственно N_{max} = 700 Н и неизвестное вам N_{min}. Вдоль оси x длина каждой комнаты b = 3 м, ширина обеих комнат также одинакова. Считайте размеры весов и Майли пренебрежимо малыми по сравнению с размерами комнаты.

Решение:

1) Рассмотрим произвольный профиль комнаты в осях z(x):



$$N = mg\cos\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{dz}{dx}$$

$$N = mg\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = mg\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

2) В первой комнате профиль комнаты представляет себе часть дуги окружности(или эллипса), уравнение которой можно задать следующим видом:

$$\left(\frac{N}{N_{MAX}}\right)^2 + \left(\frac{x-\frac{b}{2}}{\frac{D}{2}}\right)^2 = 1$$

$$N = N_{MAX}\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{b}{2}}{\frac{D}{2}}\right)^2}$$

Не сложно заметить, что раз наша функция N(x) непрерывна, то и функция z(x) тоже будет непрерывна и без изломов, значит максимальное значение N соответствует углу $\alpha = 0°$, то есть $N_{MAX} = mg = 700$ Н.

3) Теперь попробуем выразить профиль первой комнаты z(x):

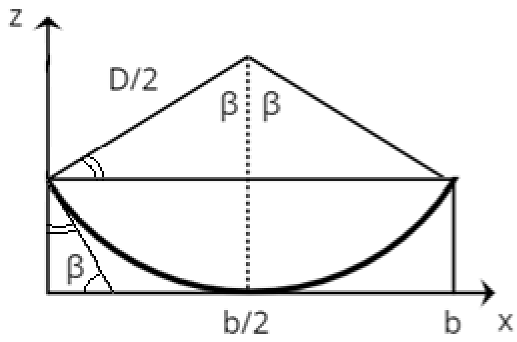
$$N_{MAX}\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{b}{2}}{\frac{D}{2}}\right)^2} = mg\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{b}{2}}{\frac{D}{2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

Решая данное дифференциальное уравнение легко получить профиль комнаты (знак z(x) определяется условием задачи):

$$z(x)=\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}+C$$

То есть пол в первой комнате выглядит, как вогнутый усеченный цилиндр



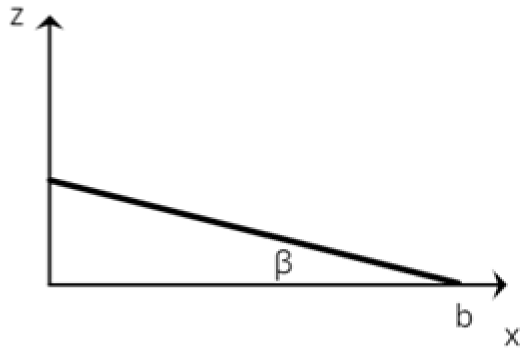
$$\cos\beta=\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{D}}\right)^2}=\frac{\sqrt{91}}{10}\approx 0{,}954$$

$$\beta=\arccos\left(\frac{\sqrt{91}}{10}\right)\approx 0{,}305\approx 17{,}46°$$

4) Определим теперь минимальные показания весов в данной комнате:

$$N_{MIN}=mg\cos\beta=mg\frac{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}}{\frac{D}{2}}=668\ \text{Н}$$

5) Теперь отметим, что во второй комнате значение N постоянно и меньше N_{MAX}, значит пол в комнате имеет постоянный наклон и в профиле выглядит следующим образом:



6) Объем бетона для первой комнаты можно выразить следующим образом:

$$V_1 = l\left(S_{\text{сектора}} - S_{\Delta}\right) = l\left(\frac{2\beta}{2\pi}\cdot\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}b\cdot\left(\frac{D}{2}\right)\cdot cos\beta\right) =$$

$$= l\left(\beta\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2\cdot sin2\beta\right) = l\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2\left(\beta - \frac{sin2\beta}{2}\right) = 0{,}463\cdot l \text{ м}^3.$$

7) Объем бетона для второй комнаты:

$$V_2 = l\cdot S_{\Delta} = l\cdot\frac{1}{2}h\cdot b = l\cdot\frac{1}{2}\cdot b^2\, tg\beta = 1{,}42\cdot l \text{ м}^3.$$

Получается, что для второй комнаты потребуется практические в 3 раз больше бетона, чем для первой.

$$\frac{V_2}{V_1} = 3{,}05.$$

Разбалловка.

Отмечено, что максимальное показание весов в комнате соответствует силе тяжести	3 балла
Записано уравнение окружности для графика с учетом масштабов (уравнение эллипса)	2 балла
Верно вычислено минимальное значение весов в первой комнате	3 балла
Отмечено, что во второй комнате пол является плоскостью с некоторым углом наклона	2 балла
Выражены показания весов через угол наклона комнаты и силу тяжести	1 балл
Верно определен угол наклона во второй комнате	1 балл
Записано уравнение для объема бетона в первой комнате	3 балла
Записано уравнение для объема бетона во второй комнате	2 балла
Найдено верное отношение объемов	3 балла

Задача 3. Электричество.

Условие () (20 баллов). Электрическая схема состоит из последовательно соединенных между собой источника с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В , сопротивления $R = 300$ КОм, и конденсатора с плоскими пластинами. Площадь пластин составляет $S = 1.13$ м^2. Одна из пластин может совершать поступательное периодическое во времени движение от/к противоположной пластины под воздействием проходящей звуковой волны, так что расстояние d между пластинами при определённой интенсивности звука задаётся выражением $d = d_0(1 + \alpha\cos(\omega t))$, где $d_0 = 1$мм, степень отклонения от равновесного положения пластины $\alpha = 0.1$, ω — циклическая частота звука, t — время. Какое тепло будет выделяться на резисторе, если линейная частота звуковой волны составляет

1. 10 Гц?
2. 10 кГц?

Решение:

Для решения задачи заметим, что исследуемые периоды колебаний пластинок конденсатора сильно отличаются в разные стороны от типичного времени релаксации системы $\tau = RC =$ 3 мс: Т (10Гц) = 100 мс, Т(10кГц) = 0.1 мс.

При медленном колебании пластинки, таким образом, можно считать, что в каждый момент времени система находится в электрическом равновесии. В стационарном приближении для определения тока, текущего через резистор, можно считать, что на конденсаторе напряжение равно ЭДС батарейки. В таком случае заряд на обкладках

$$\mathrm{q} = \mathrm{C}\mathcal{E} = \mathcal{E}\,\frac{S\,\mathcal{E}_0}{d_0(1+\alpha\cos\omega t)}$$

$$\approx \frac{\mathcal{E}\,S\,\mathcal{E}_0}{d_0}(1-\alpha\cos\omega t), \quad \text{для малых } \alpha$$

Тогда ток, проходящий через резистор, равный производной от заряда, равен:

$$I = \frac{\mathcal{E}\,S\,\mathcal{E}_0}{d_0}\alpha\omega\, sin\,\omega t$$

А выделяемая на резисторе мощность будет равна

$$P = \left(\frac{\mathcal{E}\,S\,\mathcal{E}_0}{d_0}\alpha\omega\right)^2 \sin^2\omega t\, R$$

При усреднении по периоду получаем ответ для первого пункта задачи:

$$< P >= \frac{\left(\frac{\mathcal{E}\,S\,\mathcal{E}_0}{d_0}\alpha\omega\right)^2}{2} R = 6\cdot 10^{-8}\text{Вт}$$

При быстром движении обкладок система не будет находиться в равновесном состоянии в каждый момент времени. Для быстрого перемещения можно считать, что меняется слабо заряд на конденсаторе: $\mathrm{q(t) = q_0 + \beta(t)}$. Тогда мощность на конденсаторе можно посчитать как

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{U}_\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}}$$

Где

$$\mathrm{U}_\mathrm{R} = \mathcal{E} - \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} - \left(q_0 + \beta(t)\right)\frac{d_0(1+\alpha\cos\omega t)}{S\,\mathcal{E}_0} =$$
$$= \mathcal{E} - \frac{q_0 d_0}{S\,\mathcal{E}_0} - \frac{q_0\alpha\cos\omega t + \beta(t) + \beta(t)\alpha\cos\omega t}{S\,\mathcal{E}_0} d_0$$

Первые два члена суммы сокращаются по определению d_0. Последним членом, естественно, можно пренебречь из-за его малости. Тогда напряжение на резисторе будет определяться как

$$\mathrm{U}_\mathrm{R} = -\frac{q_0\alpha\cos\omega t + \beta(t)}{S\,\mathcal{E}_0} d_0$$

Было бы здорово выкинуть второй член выражения. Для этого нужно показать, что $\beta(t)/q_0 \ll \alpha$. Оценим, какой заряд может стечь с конденсатора через резистор за период колебаний системы. Предположим, что батарейка отсутствует и конденсатор замкнут на себя через резистор. Тогда ток через резистор можно оценить сверху как $\mathcal{E}/R$, а заряд как $\mathcal{E}/R\ \cdot 1/\ f\ = 3\ \cdot 10^{-9}$ Кл. При этом, $q_0\ \alpha = 10^{-8}$ Кл. В таком случае, членом $\beta(t)$ можно пренебречь для расчёта мощности. Тогда

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{U}_\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}} = \left(\frac{q_0\alpha\cos\omega t}{S\,\mathcal{E}_0} d_0\right)^2 / R$$

И средняя мощность резистора для второго пункта

$$< P > = \frac{(\mathcal{E}\,\alpha)^2}{2R} = 3 \cdot 10^{-6}\ \text{Вт}$$

Разбалловка.

Подсчитано время релаксации системы	2 балла
Явно указано применение используемого приближения для решения первого пункта задачи	4 балла
Явно указано применение используемого приближения для решения второго пункта задачи	4 балла
Определена зависимость заряда на конденсаторе или тока через резистор от времени для первого пункта задачи	2 балла
Определена мощность, выделяемая на резисторе (мгновенная или средняя) в первом пункте задачи	3 балла
Определено напряжение на резисторе для второго пункта задачи	2 балла
Определена мощность, выделяемая на резисторе (мгновенная или средняя) во втором пункте задачи	3 балла

Задача 3. Термодинамика

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). Цикл двигателя состоит из трех участков. На участке 1-2 теплоёмкость меняется линейно с температурой согласно графику, приведенному ниже. Эта линейная зависимость пересекает ось ординат в точке C_v, что есть теплоёмкость рабочего газа при постоянном объеме. Температура на этом участке меняется от значения $T_0/4$ до значения $3T_0/4$, где T_0 — точка пересечения линейной зависимости с осью абсцисс. На участке 2-3 происходит изобарный процесс, а на участке 3-1 — изохорный процесс (не показаны на рисунке). Определите КПД данного цикла, если в качестве рабочего газа используется гелий.

Решение.

1) В первую очередь изучим процесс 1-2 и установим зависимость P(V):

$$C = \frac{\delta Q}{\delta T} = \frac{PdV + \frac{i}{2}\nu RdT}{dT} = P\frac{dV}{dT} + C_V = C_V - C_V\frac{T}{T_0}$$

$$PV = \nu RT$$

$$\frac{\nu RT}{V} \cdot \frac{dV}{dT} = -\frac{i\nu RT}{2T_0}$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{i}{2T_0}dT$$

$$\int \frac{dV}{V} = -\frac{i}{2T_0}\int dT$$

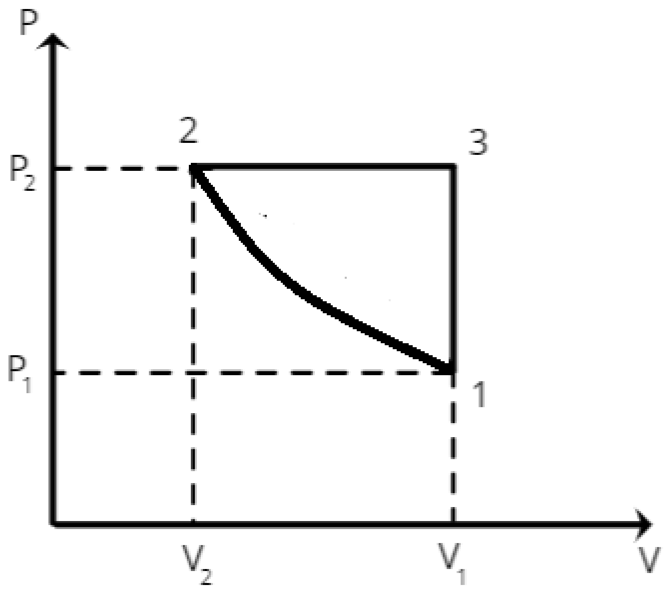
$$\ln\frac{V}{V_0} = -\frac{iT}{2T_0}$$

$$V(T) = V_0 e^{-\frac{iT}{2T_0}}$$

$$P(T) = \frac{\nu RT}{V_0} \cdot e^{\frac{iT}{2T_0}}$$

$$P(V) \sim -\frac{\ln V}{V}$$

2) Построим график зависимости P(V) цикла:



$$T_2 = 3T_1$$

$$P_2 = 3e^{3/4}P_1$$

$$V_2 = \frac{V_1}{e^{3/4}}$$

3) Обязательно стоит отметить, что график 1-2 не имеет общих касательных с адиабатой, поскольку теплоёмкость на нём не обращается в 0, а значит на всем процессе теплота будет положительной.

4) Определим теперь теплоты и работы на каждом из процессов.

Для процесса 1-2:

$$Q_{12} = \frac{\frac{3C_V}{4} + \frac{C_V}{4}}{2} \cdot (T_2 - T_1) = \frac{3}{4}(\nu RT_2 - \nu RT_1) = \frac{3}{4}(P_2V_2 - P_1V_1) = 1{,}5P_1V_1$$

$$\varDelta U_{12} = 1{,}5\upsilon R(T_2 - T_1) = 3P_1V_1$$

работа газа $A_{12} = Q_{12} - \varDelta U_{12} = -1{,}5P_1V_1$

Для процесса 2-3:

$$A_{23} = P_2(V_1 - V_2) = 3e^{3/4}P_1\left(V_1 - \frac{V_1}{e^{3/4}}\right) = 3\left(e^{3/4} - 1\right)P_1V_1$$

$$\Delta U_{23} = 1{,}5\upsilon R(T_3 - T_2) = 1{,}5(P_2V_1 - P_2V_2) = 1{,}5\left(3e^{3/4}P_1V_1 - 3P_1V_1\right) = 4{,}5\left(e^{3/4} - 1\right)P_1V_1$$

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = 7{,}5\left(e^{3/4} - 1\right)P_1V_1$$

Для процесса 3-1:

$$A_{31} = 0$$

$$Q_{31} = \Delta U_{31} < 0$$

5) Теперь определим КПД цикла:

$$\eta = \frac{A_{12} + A_{23}}{Q_{12} + Q_{23}} = 0{,}187$$

Разбалловка.

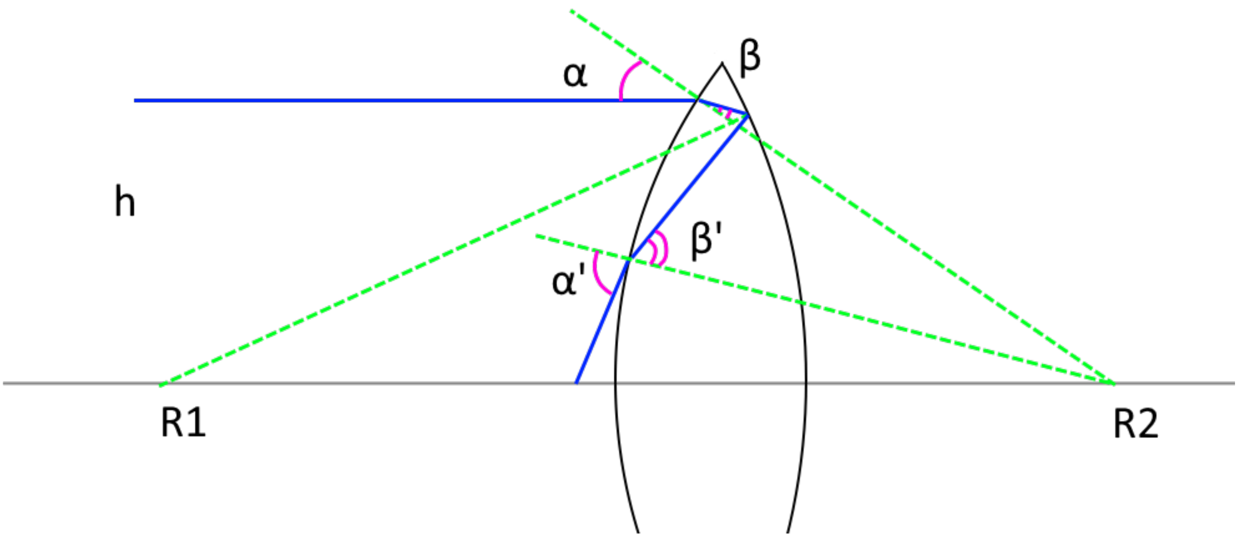
Верно записано уравнение теплоёмкости в зависимости от температуры	1 балл
Верно записано уравнение теплоёмкости из первого начала термодинамики	2 балла
Определена зависимость P(V) для процесса 1-2	3 балла
Отмечено, что процесс 1-2 не имеет общих касательных с адиабатой и теплота полученная на процессе 1-2 будет положительной	1 балл
Верно определена теплота на процессе 1-2	2 балла
Верно определена работа на процессе 1-2 с учетом знака	2 балла
Верно определена теплота на процессе 2-3	2 балла
Верно определена работа на процессе 2-3 с учетом знака	2 балла
Отмечено, что работа на процессе 3-1 будет 0	1 балл
Отмечено, что теплота на процессе 3-1 будет отрицательной	1 балл
Верно определено КПД цикла	3 балла

Задача 4. Оптика

Условие (Галиуллин Арслан Анварович) (20 баллов). На двояко-выпуклую тонкую линзу с показателем преломления материала 1.5 падает параллельно главной оптической оси пучок света. Радиусы кривизны поверхностей линзы равны 500 и 600 мм соответственно.

Помимо фокуса, где собираются преломлённые линзой лучи, которые ни разу не отразились от внутренних поверхностей линзы, существует дополнительный фокус, где собираются лучи, испытавшие одно внутреннее отражение от одной из поверхностей линзы. Определите расстояние от линзы до точки, где фокусируются эти лучи

Решение. Для простого решения задачи важно учесть параксиальность рассматриваемого приближения, а также тонкость линзы. Рассмотрим луч, который падает на линзу, идущий на расстоянии h от главной оптической оси системы, см. рис.



Луч падает на поверхность с радиусом кривизны R_2 под углом $\alpha = arc\tan\frac{h}{R2}$ к нормали и преломляется под углом β. Для этих углов справедлива формула

$$\sin\alpha = n\ \sin\beta$$

После преломления луч отражается от поверхности с радиусом кривизны R_1.

Угол наклона нормали к горизонтали в точке отражения луча определяется как $arc\sin\frac{h}{R_1}$. В этой формуле учтена тонкость линзы: внутри линзы луч прошёл малое расстояние (стремящееся к нулю при стремлении толщины линзы к нулю). Тогда угол падения луча при его отражении можно определить из геометрии: он равен $\alpha - \beta + arc\sin\frac{h}{R_1}$.

После отражения падает на поверхность с радиусом кривизны R_2 под углом β', преломляясь и выходя из объёма линзы под углом α' к нормали.

Угол падения на эту поверхность можно вычислить из предыдущих углов, а также из угла наклона нормали к горизонтали в этой точке преломления $arc\sin\frac{h}{R_2}$ (в этой формуле также учитывается малость толщины линзы). Тогда угол падения луча в этой точке β' будет равен $\alpha - \beta + 2arc\sin\frac{h}{R_1} + arc\sin\frac{h}{R_2}$. Для углов α' и β' справедлива связь

$$\sin\alpha' = n\ \sin\beta'$$

А точка пересечения луча с главной оптической осью будет определяться как

$$F' = h\cot(\alpha' - arc\sin\frac{h}{R_2})$$

Для упрощения дальнейшего решения задачи заметим, что все углы, введённые в процессе решения, являются малыми, так что все соответствующие тригонометрические формулы упрощаются: $sin\,x = x, cot\,⟦x = 1/x⟧$ для малых x. Решая упрощённую таким образом систему уравнений, получаем ответ:

$$F' = \frac{1}{2n\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{2}{R_2}}$$

Разбалловка.

Определён угол падения на первую поверхность линзы	2 балла
Записан закон Снелла для первого преломления луча	1 балл
Определён угол падения луча при отражении	4 балла
Определён угол падения луча для второго преломления	4 балла
Записан закон Снелла для второго преломления луча	1 балл
Записана зависимость ответа от углов	3 балла
Получен верный ответ	5 баллов

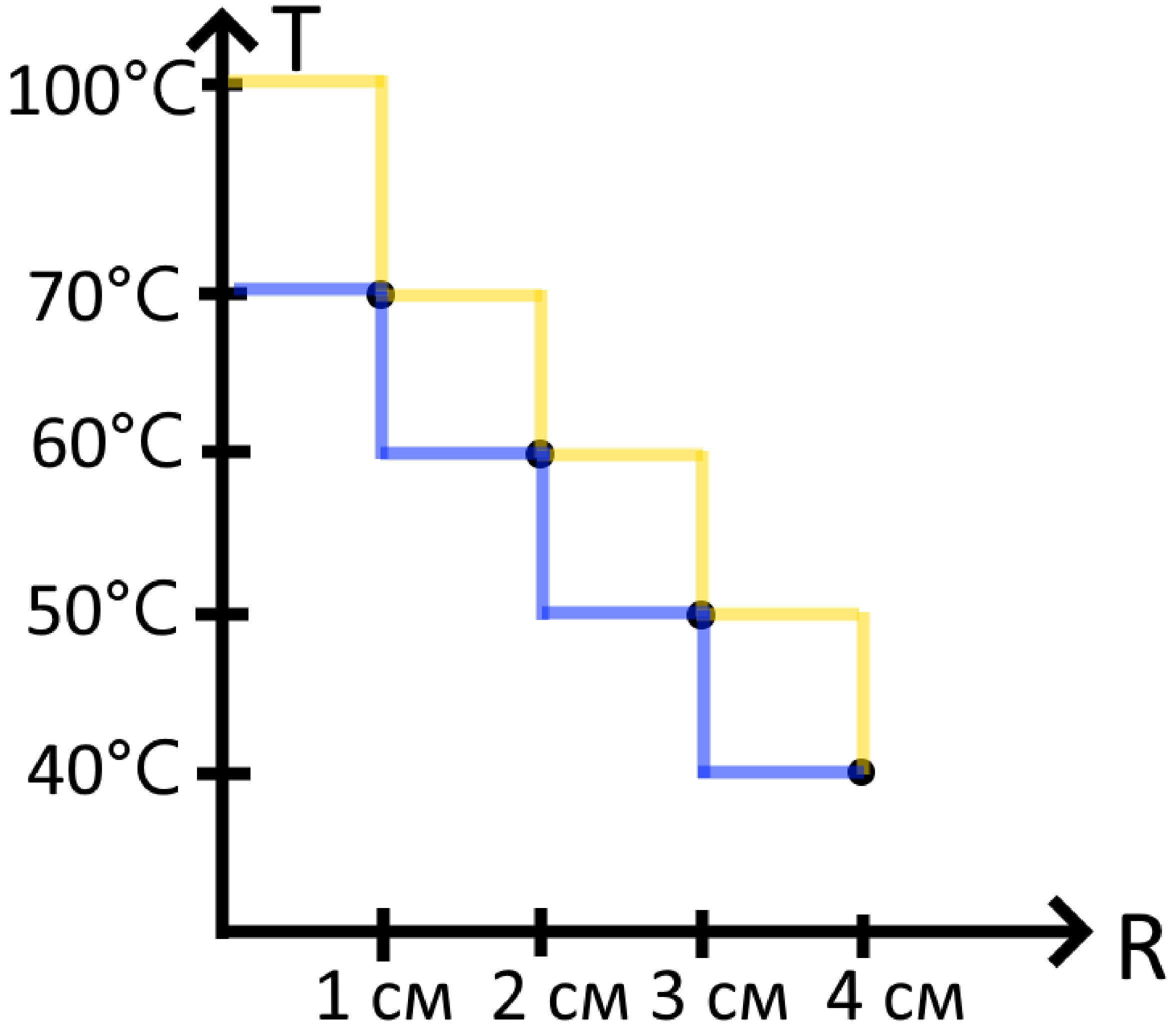
Условие () (20 баллов). На теплопроводящей пластине в форме круга закрепили процессор, который в работающем состоянии выделяет тепло. Для отвода тепла система обдувается воздухом с температурой $25°C$. Процессор представляет собой круглую пластинку радиусом $R_4 = 4$ см. Про распределение температур на этой пластинке известно, что на её краю температура равна $T_4 = 40°C$, на расстоянии $R_3 = 3$ см от центра пластинки температура равна $T_3 = 50°C$, на расстоянии $R_2 = 2$ см — $T_2 = 60°C$, на расстоянии $R_1 =$ 1 см — $T_1 = 70°C$. Оцените рассеиваемую мощность и ошибку её измерения, если известно, что теплоотдача пропорциональна разности температур пластины и воздуха. Равномерно нагретая до $70°C$ пластина рассеивает мощность 16 Вт при температуре воздуха $20°C$.

Решение. Определим коэффициент пропорциональности между разностью температур пластинки и воздуха и теплоотдачей. Небольшая площадь пластинки отдаёт мощность $dP = dS\,\alpha\,\Delta T$, где dS — выбранная площадь, ΔT — разница температуры между площадью пластинки и воздухом, а α — некоторый коэффициент. Если пластинка равномерно нагрета до $70°C$ и рассеивает мощность 16Вт при температуре воздуха $20°C$, то:

$$16\text{ Вт} = \alpha\,\pi\,(4\text{ см})^2(70 - 20)°C$$

Откуда получаем $\alpha = 6.4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 °C}$..

Определим теперь по этим данным мощность, выделяемую на процессоре, для данного распределения температур. Мы не знаем всей функции T(R), а знаем только значения в 4 точках. Однако понятно, что функция T(R) не может быть любой — она, по крайней мере, должна быть монотонной. Поэтому попробуем сделать два расчёта тепловыделения на основе двух функций, дающих минимальное и максимальное значение теплопроводности.



Для оценки минимального значения тепловыделения будем считать, что зависимость T(R) представлена синим цветом на графике. В таком случае оно будет равно

$$\frac{P_{min}}{\text{Вт}} = = 6.4 \cdot 10^{-3}\pi\big((70-25)1^2 + (60-25)(2^2-1^2) + (50-25)(3^2-2^2) + (40-25)(4^2-3^2)\big) = 7{,}6 \text{ Вт}$$

Для оценки максимального значения возьмём оранжевую зависимость. Мы не знаем температуру в центре пластинки — положим её равной $100°C$, типичной максимальной температуре процессоров от персональных компьютеров.

Тогда, выполняя аналогичный расчёт, получаем оценку $P_{max} = 11{,}3$ Вт. Настоящее мощность лежит где-то между этими двумя оценками и равна какому-нибудь среднему от этих двух значений. Положим, что истинное значение тепловыделения ближе к среднему геометрическому — тогда при тепловыделении в 9.5 Вт ошибка нашего вычисления, связанного с неизвестностью функции распределения температуры, можно быть около 10%.

Разбалловка.

Получен коэффициент пропорциональности между теплоотдачей и разницой температур пластинки и воздуха	3 балла
Предложена идея расчёта тепловыделения по 4 точкам зависимости	4 баллов
Предложена идея оценки ошибки	5 баллов
Обоснованно получено значение теплопроводности	5 баллов
Получена оценка ошибки вычисления значения теплопроводности	4 балла