9 класс. Решения.

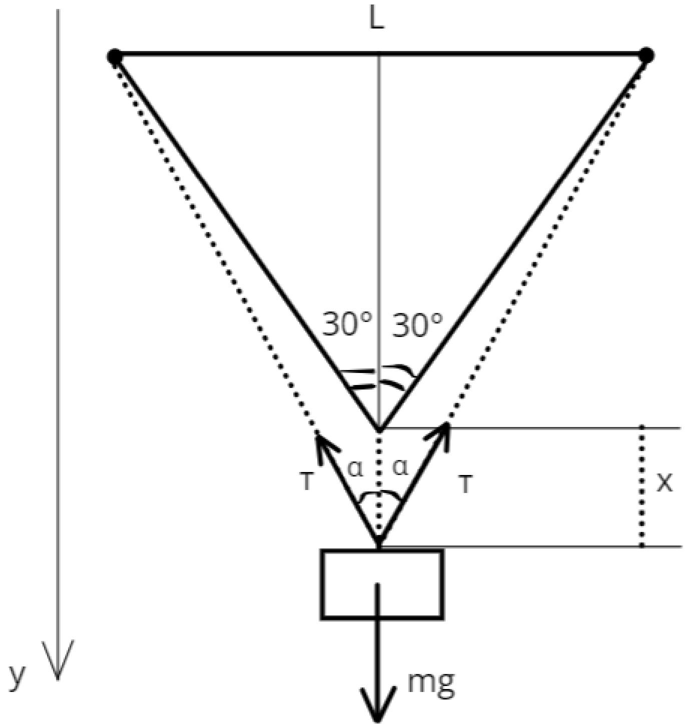
Каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Механика.

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). Замкнутую невесомую гладкую резинку длиной 30 см подвешивают без образования петель на 2 расположенных на одной горизонтали гвоздика. Расстояние между гвоздями 10 см, резинка может скользить по гвоздикам без трения. На нижнюю часть резинки подвешивают гладкое кольцо массой 300 г, в результате чего в положении равновесия оно оказывается на 2 см ниже, чем вершина равностороннего треугольника с вершинами в точках крепления гвоздей. Определите удельную (на единицу длины) жёсткость резинки. Для простоты расчётов считайте, что ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

Решение:

1) Введем некоторые обозначения, пусть L – это длина стороны равностороннего треугольника, которая из условия равна 10 см; x = 2 см – это величина, на которую опустится груз; T – сила натяжения, которая возникает в резинке. Сделаем схематичный рисунок:



2) Обозначим жёсткость всей резинки как k, её удлинение после подвешивания грузика Δl. В силу того, что резинка невесома и между ней и гвоздями отсутствует трение, то сила натяжения в каждой из сторон будет одинакова.

3) Обозначим растяжение каждой из сторон, как Δl. Получим следующие уравнения из II закона Ньютона для массы:

$$oy: mg - 2T \cdot \cos\alpha = ma_y = 0$$

$$2T \cos\alpha = mg$$

$$2\, k\Delta l\, cos\alpha = mg$$

$$k = \frac{mg}{2\Delta l \cos\alpha}$$

4) Теперь определим косинус данного угла из геометрии:

$$x = \sqrt{(L + \Delta l/2)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} - L\cos 30°\ \text{м}$$

$$\Delta l = 2\left(-L + \sqrt{L^2 + \sqrt{3}Lx + x^2}\right) = 3.6\ \text{см}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\left(L + \frac{\Delta l}{2}\right)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}}{L + \frac{\Delta l}{2}} = 0.91$$

5) Тогда итоговая жесткость составит:

$$k_{\text{итог}} = \frac{mg}{2\Delta l \cos\alpha} = 45{,}8\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

А удельная жесткость составит:

$$\frac{k_{\text{итог}}}{L} = 153\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

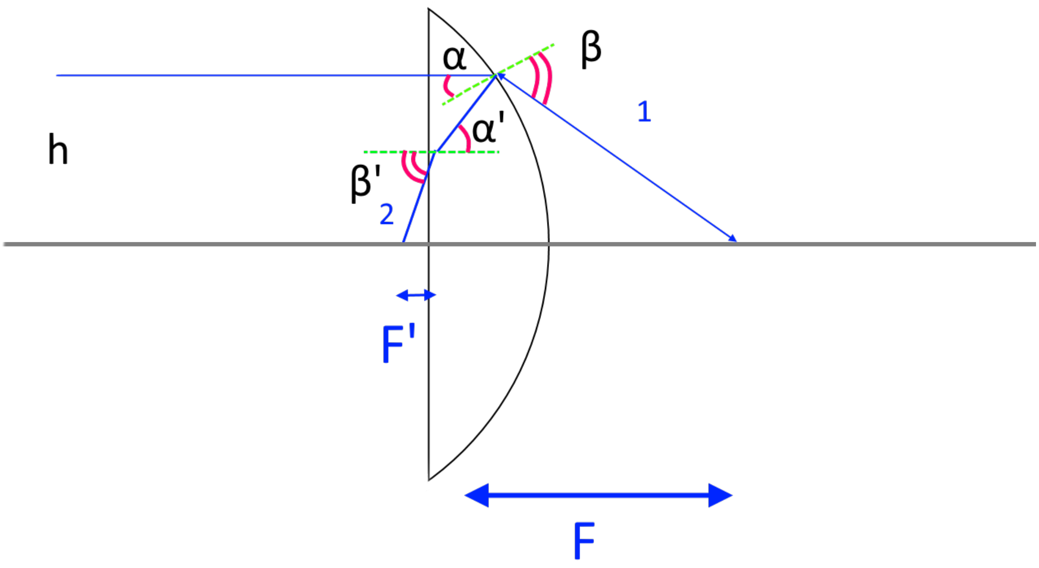
Разбалловка.

Верно указаны направления действия сил на рисунке	2 балла
Отмечено, что сила натяжения по всей резинке будет одинаковой	3 балла
Верно записан II закон Ньютона вдоль вертикальной оси	4 балла
Геометрически определено растяжение резинки	4 балла
Верно определена жесткость резинки	5 баллов
Верно определена удельная жесткость всей резинки	2 балла

Задача 2. Оптика

Условие (Галиуллин Арслан Анварович) (20 баллов). На плоскую часть тонкой плоско-выпуклой линзы с фокусным расстоянием 10 см и показателем преломления материала $n = 1.5$ падает параллельно главной оптической оси пучок света. Помимо фокуса, где собираются преломлённые линзой лучи, которые ни разу не отразились от внутренних поверхностей линзы, существует дополнительный фокус, где собираются лучи, испытавшие одно внутреннее отражение от одной из поверхностей линзы. Определите расстояние от линзы до точки, где фокусируются эти лучи.

Решение: Для простого решения задачи важно учесть параксиальность рассматриваемого приближения, а также тонкость линзы. Рассмотрим луч, который падает на линзу, идущий на расстоянии h от главной оптической оси системы, см. рис.



Луч 1, прошедший через плоскую часть линзы и преломившийся на второй поверхности линзы, пересекает главную оптическую ось системы в основном фокусе. Распишем, чему равен этот фокус.

$$F = h\,cot(\beta - \alpha)$$

Где β и α – соответствующие углы падения и преломления луча 1 на второй поверхности линзы. Для этих углов справедлива формула

$$sin\,\beta = n\,sin\,\alpha$$

Для определения расстояния, на котором соберутся лучи, отражённые единожды от второй кривой поверхности линзы, построим ход того же луча, падающего на линзу на расстоянии h от главной оптической оси, но отражённого от кривой поверхности линзы. Отметим ход этого отражённого луча цифрой 2 на рисунке. Угол падения на плоскую поверхность после отражения от кривой поверхности линзы обозначим α', а угол преломления от этой же поверхности β'. Для этих углов справедлива формула

$$sin\,\beta' = n\,sin\,\alpha'$$

Расстояние от линзы до точки пересечения луча 2 с главной оптической осью обозначим F'. Заметим, что расстояния F и F' могут отсчитываться от любой точки линзы, так как она является тонкой.

F' связан с углом преломления β' и начальной высотой луча h следующей формулой:

$$F' = h\,cot\,\beta'$$

Это выражение получается из рассмотрения соответствующего прямоугольного треугольника. На рисунке видно, что его вертикальный катет, естественно, отличается от h в силу непропорциональности рисунка условию задачи. Однако, при стремлении толщины линзы к нулю, соответствующий катет треугольника стремится к этой высоте h, так что формула справедлива.

Для упрощения дальнейшего решения задачи заметим, что все углы, введённые в процессе решения, являются малыми, так что все соответствующие тригонометрические формулы упрощаются: $sin\,x = x, cot \llbracket x = 1/x \rrbracket$ для малых x. Решая упрощённую таким образом систему уравнений, получаем ответ:

$$F' = F\frac{n-1}{2n}$$

Разбалловка.

Надейна связь фокуса и углов падения/преломления	3 баллов
Записан закон Снелла для углов преломления при преломлении на кривой поверхности линзы	2 балла
Записан закон Снелла для углов преломления на плоской поверхности линззы	3 балла
Явно учтена тонкость линзы	3 балла
Явно учтена малость всех углов	2 балла
Записана связь искомого расстояния и углов	3 балла
Получен верный ответ	4 балла

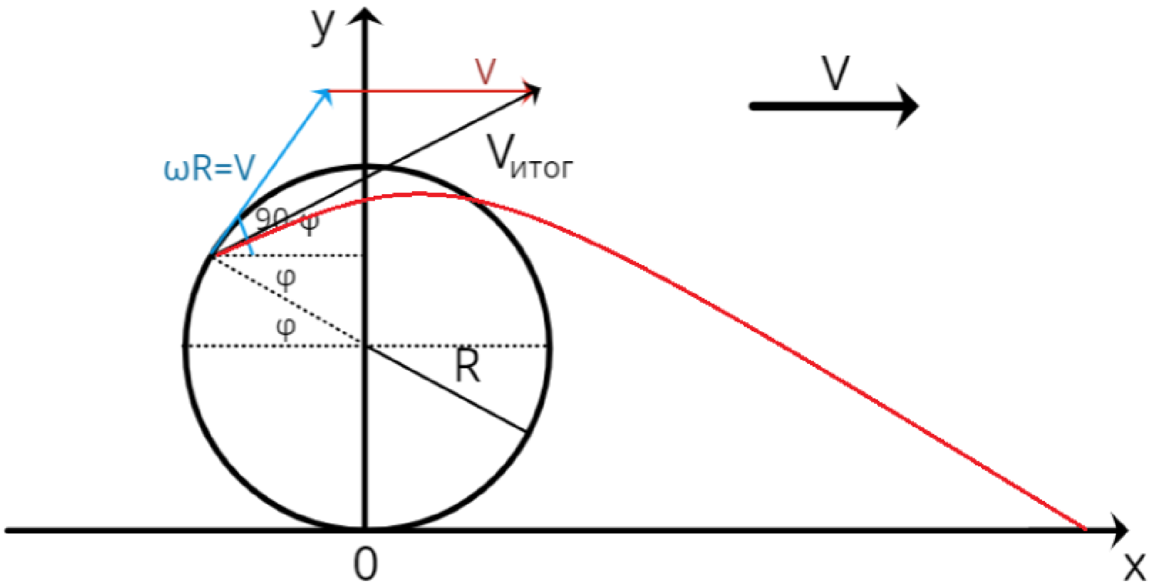
Задача 3. Кинематика

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). Колесо радиусом R катится по горизонтальной дороге без проскальзывания с постоянной скоростью $V = \sqrt{2Rg}$, где g — ускорение свободного падения. На поверхности качения колеса имеется маленькая капля краски, которая в некоторый момент времени отлетает от колеса. Определите на какую максимальную возможную высоту относительно земли сможет подняться данная капля. На каком расстоянии от точки отлета приземлится данная капля в этом случае?

Решение.

1) Отметим, что при движении колеса без проскальзывания полная скорость капель краски складывается из векторной суммы поступательной скорости V и вращательной скорости $\omega R = V$.

2) Теперь определим, на каком максимальном расстоянии по оси y может оказаться капля краски. Для этого рассмотрим произвольную точку:



Время подъема до верхней точки составит:

$$t_{\text{под}} = \frac{V_y}{g} = \frac{V\sin(90-\varphi)}{g} = \frac{V\cos\varphi}{g}$$

Высота подъёма относительно точки вылета:

$$h = \frac{{V_y}^2}{2g} = \frac{(V\cos\varphi)^2}{2g} = \frac{V^2\cos^2\varphi}{2g}$$

Высота подъёма относительно поверхности:

$$H = h + R(1+\sin\varphi) = \frac{V^2\cos^2\varphi}{2g} + R(1+\sin\varphi) = \frac{V^2(1-\sin^2\varphi)}{2g} + R(1+\sin\varphi)$$

Не сложно заметить, что это квадратное уравнение будет иметь максимум при:

$$\sin\varphi = \frac{gR}{V^2} = \frac{1}{2}$$

Получим, что максимальная высота подъёма относительно земли составит:

$$H = 2{,}25R$$

3) Теперь определим расстояние, которое пролетит по оси x данная капля. Для этого нам необходимо будет найти время падения капли от верхней точки до земли:

$$t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{4{,}5R}{g}}$$

Расстояние по оси x получится:

$$S_x = V_x t_{\text{пол}} = (V + V\cos(90-\varphi))(t_{\text{пад}} + t_{\text{под}}) = 1{,}5V\left(\sqrt{\frac{4{,}5R}{g}} + \sqrt{\frac{1{,}5R}{g}}\right)$$

$$S_x = \frac{3(3+\sqrt{3})}{2}R$$

4) Теперь определим перемещение данной капли от точки отрыва от колеса до точки приземления:

$$|S_y| = R(1+\sin\varphi) = 1{,}5R$$

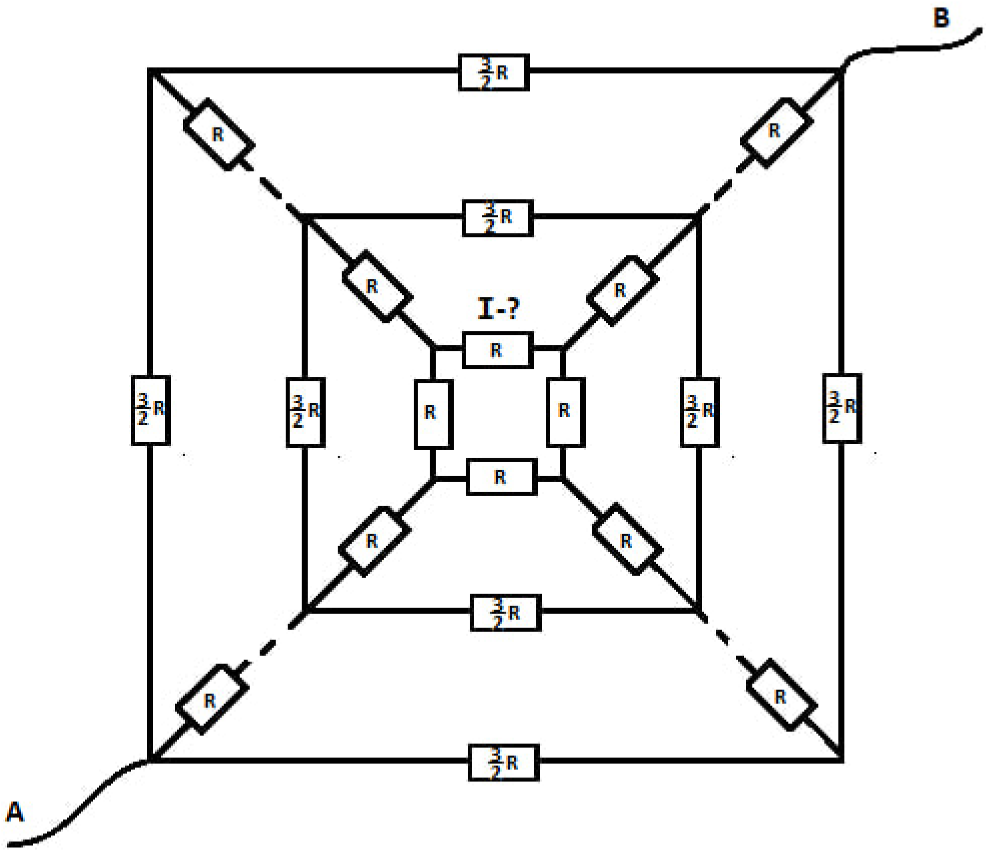
$$L = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = 7{,}25R$$

Разбалловка.

Указано условие движения без проскальзывания	1 балла
Верно указана векторная сумма скорости поступательного и вращательного движения точки на колесе	2 балла
Найдена проекция полной скорости на вертикальную ось	2 балла
Записана формула высоты подъема при баллистическом движении	1 балл
Записана формула высоты подъема капли относительно земли в зависимости от одного параметра	3 балла
Правильно определен максимум этой функции	3 балла
Правильно определена максимальная высота подъема капли	2 балла
Правильно определено смещение по оси x для капли	3 балла
Правильно определено расстояние от точки отрыва до до точки приземления	3 балла

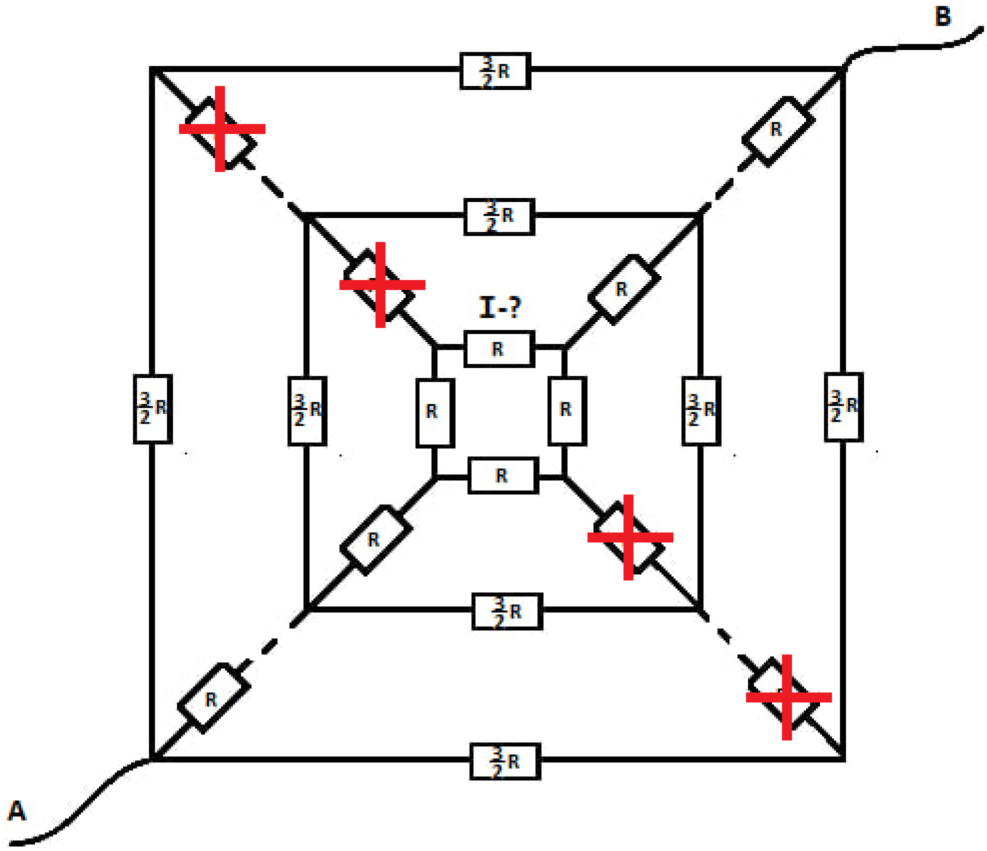
Задача 4. Электричество

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). Имеется схема из $N = 2024$ вложенных квадратов, на сторонах каждого из которого располагаются резисторы с сопротивлением $1{,}5R$, кроме центрального, как указано на рисунке. Все эти квадраты соединены по диагоналям резисторами с сопротивлением R. Определить ток через указанный на рисунке резистор, если подать напряжение U_0 на контакты AB.



Решение:

1) В силу симметрии можно заметить, что через диагональные резисторы R не пойдет ток, поэтому их можно убрать из схемы:



2) Определим теперь сопротивление центрального участка:

$$R_1 = 2R + \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = 3R$$

3) Теперь определим сопротивление первых двух квадратов (если нумеровать квадраты из центра):

$$\frac{1}{R_2} = \frac{2}{1{,}5R + 1{,}5R} + \frac{1}{3R}$$

$$R_2 = R$$

4) Сопротивление первых трёх квадратов составит:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{2}{1{,}5R + 1{,}5R} + \frac{1}{R_2 + 2R}$$

$$R_3 = R$$

5) Не сложно заметить, что при добавлении каждого следующего квадрата общее сопротивление не будет меняться:

$$\frac{1}{R_N} = \frac{2}{1{,}5R + 1{,}5R} + \frac{1}{R_{N-1} + 2R}$$

$$R_N = R$$

$$R_{\text{общ}} = R_{2024} = R$$

6) Общий ток через контакты АВ составит:

$$I_{\text{общ}} = \frac{U_0}{R}$$

7) При прохождении каждого квадрата ток делится на 3 равные части, кроме последнего квадрата, в нём он делится на 2 равные части, значит искомый ток определяется, как:

$$I = \frac{U_0}{2 \cdot 3^{2023} R}$$

Разбалловка.

Отмечено, что через диаметральные резисторы не пойдет ток и их можно убрать	4 балла
Правильно установлено, что от числа квадратов общее сопротивление не зависит и равно R	6 баллов
Правильно определен общий ток в цепи	2 балла
Правильно отмечена закономерность, что ток делится 2023 раза на 3 части	3 балла
Правильно отмечено, что последний раз ток делится на 2 части	2 балла
Итоговый ответ	3 балла

Задача 5. Задача-оценка (термодинамика)

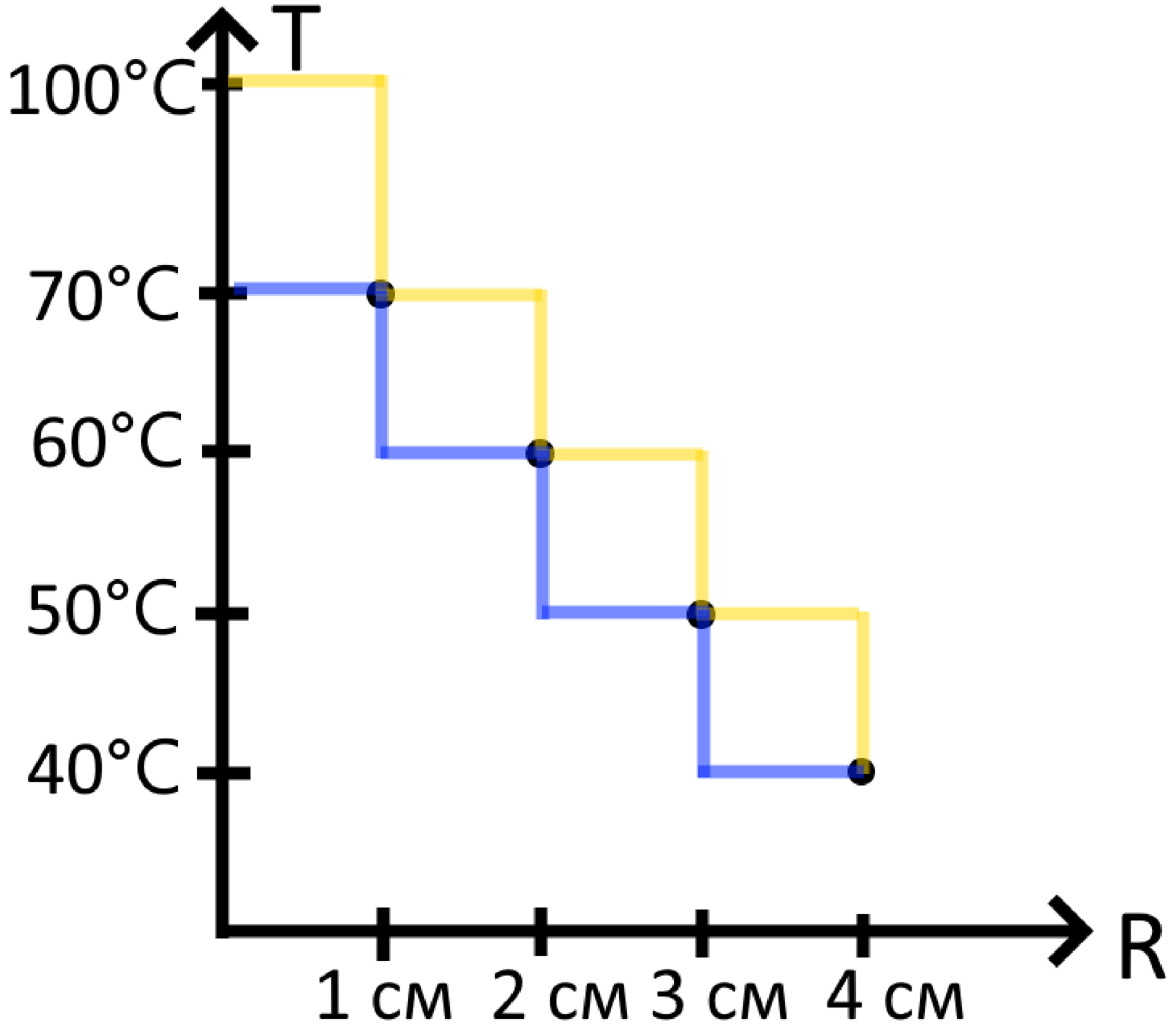
Условие () (20 баллов). На теплопроводящей пластине в форме круга закрепили процессор, который в работающем состоянии выделяет тепло. Для отвода тепла система обдувается воздухом с температурой $25°C$. Процессор представляет собой круглую пластинку радиусом $R_4 = 4$ см. Про распределение температур на этой пластинке известно, что на её краю температура равна $T_4 = 40°C$, на расстоянии $R_3 = 3$ см от центра пластинки температура равна $T_3 = 50°C$, на расстоянии $R_2 = 2$ см — $T_2 = 60°C$, на расстоянии $R_1 = 1$ см — $T_1 = 70°C$. Оцените рассеиваемую мощность и ошибку её измерения, если известно, что теплоотдача пропорциональна разности температур пластины и воздуха. Равномерно нагретая до $70°C$ пластина рассеивает мощность 16 Вт при температуре воздуха $20°C$.

Решение. Определим коэффициент пропорциональности между разностью температур пластинки и воздуха и теплоотдачей. Небольшая площадь пластинки отдаёт мощность $dP = dS\,\alpha\,\Delta T$, где dS — выбранная площадь, ΔT — разница температуры между площадью пластинки и воздухом, а α — некоторый коэффициент. Если пластинка равномерно нагрета до $70°C$ и рассеивает мощность 16Вт при температуре воздуха $20°C$, то:

$$16 \text{ Вт} = \alpha\,\pi\,(4 \text{ см})^2 (70 - 20)°C$$

Откуда получаем $\alpha = 6.4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 {}^\circ C}$..

Определим теперь по этим данным мощность, выделяемую на процессоре, для данного распределения температур. Мы не знаем всей функции T(R), а знаем только значения в 4 точках. Однако понятно, что функция T(R) не может быть любой — она, по крайней мере, должна быть монотонной. Поэтому попробуем сделать два расчёта тепловыделения на основе двух функций, дающих минимальное и максимальное значение теплопроводности.



Для оценки минимального значения тепловыделения будем считать, что зависимость T(R) представлена синим цветом на графике. В таком случае оно будет равно

$$\frac{P_{min}}{\text{Вт}} == 6.4 \cdot 10^{-3}\pi\big((70-25)1^2 + (60-25)(2^2-1^2) + (50-25)(3^2-2^2) + (40-25)(4^2-3^2)\big) = \ 7{,}6\ \text{Вт}$$

Для оценки максимального значения возьмём оранжевую зависимость. Мы не знаем температуру в центре пластинки — положим её равной $100°C$, типичной максимальной температуре процессоров от персональных компьютеров.

Тогда, выполняя аналогичный расчёт, получаем оценку $P_{max} = 11{,}3$ Вт. Настоящее мощность лежит где-то между этими двумя оценками и равна какому-нибудь среднему от этих двух значений. Положим, что истинное значение тепловыделения ближе к среднему геометрическому — тогда при тепловыделении в 9.5 Вт ошибка нашего вычисления, связанного с неизвестностью функции распределения температуры, можно быть около 10%.

Разбалловка.

Получен коэффициент пропорциональности между теплоотдачей и разницей температур пластинки и воздуха	3 балла (1 балл, если не учитывалась площадь)
Предложена идея расчёта тепловыделения по 4 точкам зависимости	4 баллов
Предложена идея оценки ошибки	5 баллов
Обоснованно получено значение теплопроводности	5 баллов
Получена оценка ошибки вычисления значения теплопроводности	4 балла

В случае получения верной оценки (от 7,6 до 11,2 Вт), при использовании линейной зависимость и без оценки погрешности выставляется оценка 10 баллов.