

10 класс. Решения.

Каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Механика.

Условие (Галиуллин Арслан Анварович) (20 баллов). На гладкой горизонтальной поверхности стола закреплены два маленьких гвоздика на расстоянии $2d$ друг от друга. К гвоздикам привязаны концы нерастяжимой невесомой нити длиной $2L$ ($L > d$). На нить надета маленькая бусина массой m , скользящая по ней без трения.

Бусину приводят в движение в горизонтальной плоскости так, что в начальный момент времени нить натянута, а вектор скорости бусины параллелен прямой, соединяющей гвоздики. Известно, что в этот момент угловая скорость вращения одного из прямых участков нити составляет ω .

1. Найдите начальную линейную скорость бусины v_0 .
2. Найдите силу натяжения нити T_1 сразу после начала движения.
3. Найдите силу натяжения нити T_2 непосредственно перед началом её наматывания на один из гвоздиков.

Решение: 1. Геометрия траектории.

Траектория движения бусины представляет собой эллипс с фокусами в точках закрепления гвоздей, так как сумма расстояний от бусины до фокусов постоянна и равна длине нити $2L$.

Большая полуось эллипса: $a = L$.

Фокусное расстояние (половина расстояния между гвоздями): $c = d$.

Малая полуось эллипса: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{L^2 - d^2}$.

В начальный момент скорость параллельна линии гвоздей, что возможно только в вершине малой оси эллипса. В конечный момент (перед наматыванием) бусина находится в вершине большой оси эллипса.

2. Закон сохранения энергии.

Сила натяжения нити при движении по эллипсу всегда направлена по биссектрисе угла между участками нити. Касательная к эллипсу (вектор скорости) перпендикулярна этой биссектрисе (оптическое свойство эллипса). Следовательно, работа силы натяжения равна нулю. Так как трения нет, модуль скорости бусины постоянен:

$$v = v_0 = \text{const.}$$

3. Начальная скорость v_0 .

Рассмотрим начальный момент. Пусть α — угол между участком нити и перпендикуляром к линии гвоздей (нормалью к скорости). Из геометрических соображений (прямоугольный треугольник с катетами d и b и гипотенузой L):

$$\cos \alpha = \frac{b}{L}.$$

Проекция скорости бусины на направление, перпендикулярное нити, равна линейной скорости вращения точки нити вокруг гвоздя ($v_{\perp} = \omega L$). Отсюда находим v_0 :

$$v_0 \cos \alpha = \omega L \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{\omega L}{\cos \alpha} = \frac{\omega L}{b/L} = \frac{\omega L^2}{b}.$$

Подставляя b :

$$v_0 = \frac{\omega L^2}{\sqrt{L^2 - d^2}}.$$

4. Сила натяжения в начале (T_1).

В вершине малой оси радиус кривизны эллипса равен: $\rho_1 = \frac{a^2}{b} = \frac{L^2}{b}$.

Запишем второй закон Ньютона в проекции на нормаль к траектории. Центробежное ускорение создают две силы натяжения T_1 , проецирующиеся на нормаль с углом α :

$$2T_1 \cos \alpha = m \frac{v_0^2}{\rho_1}.$$

Подставляем известные величины ($\cos \alpha = b/L$ и $\rho_1 = L^2/b$):

$$2T_1 \frac{b}{L} = m \frac{(\omega L^2/b)^2}{L^2/b} = m \frac{\omega^2 L^4}{b^2} \cdot \frac{b}{L^2} = m \frac{\omega^2 L^2}{b}.$$

Выражаем T_1 :

$$T_1 = \frac{m \omega^2 L^3}{2b^2} = \frac{m \omega^2 L^3}{2(L^2 - d^2)}.$$

5. Сила натяжения перед наматыванием (T_2).

В этот момент бусина находится в вершине большой оси эллипса.

Скорость бусины по-прежнему v_0 .

Радиус кривизны эллипса в вершине большой оси: $\rho_2 = \frac{b^2}{a} = \frac{b^2}{L}$.

В этой точке оба участка нити направлены вдоль одной прямой к центру. Угол между силами и нормалью равен 0.

Второй закон Ньютона:

$$2T_2 = m \frac{v_0^2}{\rho_2} = m \frac{(\omega L^2/b)^2}{b^2/L} = m \frac{\omega^2 L^5}{b^4}.$$

Отсюда:

$$T_2 = \frac{m\omega^2 L^5}{2b^4} = \frac{m\omega^2 L^5}{2(L^2 - d^2)^2}.$$

Разбалловка

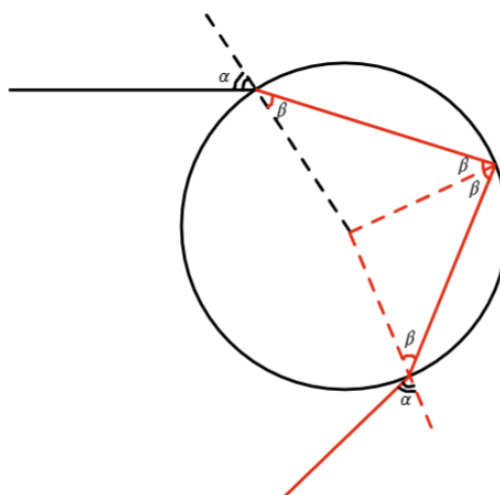
Показано, что траектория — эллипс, определены полуоси a и b	2
Обосновано постоянство модуля скорости v_0	2
Записана связь $v_{\perp} = \omega L$ и найден v_0	4
Записан II з.Н. для начального момента (с радиусом кривизны ρ_1)	3
Получен верный ответ для T_1	3
Записан II з.Н. для конечного момента (с радиусом кривизны ρ_2)	3
Получен верный ответ для T_2	3

Задача 2. Оптика.

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). Радуга возникает при освещении белым солнечным светом множества водяных капель. Пусть луч белого света падает на каплю воды радиусом R . Известно, что красный луч наибольшей интенсивности, формирующий радугу, отклоняется на $138,0^\circ$ относительно падающего луча в то время, как фиолетовый луч наибольшей интенсивности отклоняется на $139,8^\circ$. При этом показатель преломления воды для света фиолетового цвета на 0,9% больше, чем для красного. Определите, на каком расстоянии от центра капли внутри капли будет вновь образовываться белый свет. Считать, что вокруг капли воды находится воздух с показателем преломления 1.

Решение:

- 1) Отметим, что луч не может отклониться на такой угол при обычном прохождении через шарообразную каплю. Поэтому следует рассмотреть случай частичного отражения света на границе капли и воздуха (первичная радуга).
- 2) Построим ход красного луча:



Определим угол отклонения луча:

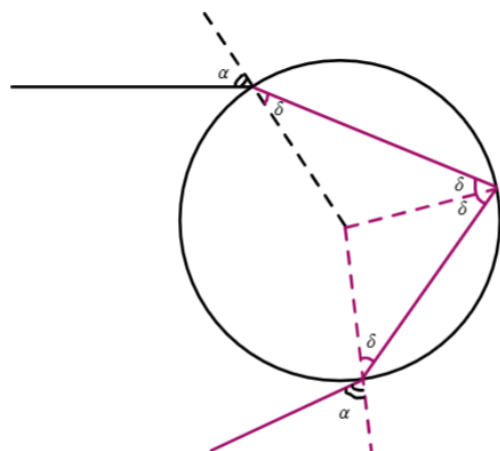
$$2(\alpha - \beta) + (180 - 2\beta) = 138,0^\circ$$

$$4\beta - 2\alpha = 42^\circ$$

Запишем закон преломления света:

$$1 \cdot \sin(\alpha) = n_k \sin(\beta)$$

3) Аналогично будет для фиолетового луча:



$$2(\alpha - \delta) + (180 - 2\delta) = 139,8^\circ$$

$$4\delta - 2\alpha = 40,2^\circ$$

Запишем закон преломления света:

$$1 \cdot \sin(\alpha) = n_\phi \sin(\delta)$$

4) Из этих 4-х уравнений следует:

$$4(\beta - \delta) = 1,8^\circ$$

$$1,009 \sin(\delta) = \sin(\beta)$$

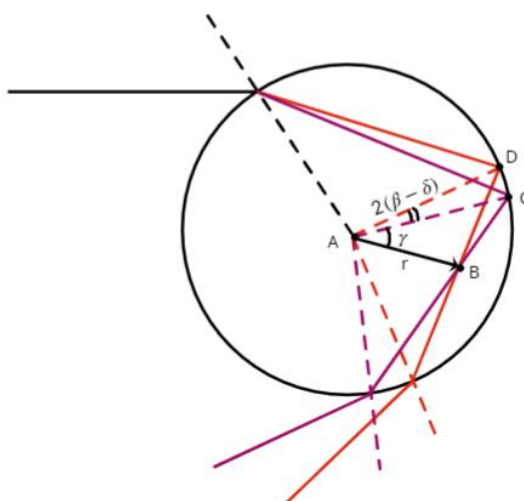
$$1,009 \sin(\delta) = \sin(0,45^\circ + \delta) = \sin(0,45^\circ) \cdot \cos(\delta) + \cos(0,45^\circ) \cdot \sin(\delta)$$

$$tg(\delta) = \frac{\sin(0,45^\circ)}{1,009 - \cos(0,45^\circ)}$$

$$\delta = 41,01^\circ; \alpha = 61,92^\circ; \beta = 41,46^\circ$$

$$n_K = 1,333; n_\Phi = 1,345$$

5) Теперь определим на каком расстоянии данные лучи пересекаются. Из-за малых поправок в показателе преломления для разных цветов все эти лучи будут пересекаться примерно в одной точке, которая соответствует точке пересечения красного и фиолетового цвета:



Запишем теорему синусов для треугольников ABC и ABD:

$$\frac{R}{r} = \frac{\sin(180 - \delta - \gamma)}{\sin(\delta)} = \frac{\sin(180 - \beta - (\gamma + 2(\beta - \delta)))}{\sin(\beta)}$$

$$\frac{\sin(\gamma + \delta)}{\sin(\delta)} = \frac{\sin(\gamma + 3\beta - 2\delta)}{\sin(\beta)}$$

$$1,009 \sin(\gamma + 41,01^\circ) = \sin(\gamma + 42,36^\circ)$$

$$tg(\gamma) = \frac{\sin(42,36^\circ) - 1,009\sin(41,01^\circ)}{1,009\cos(41,01^\circ) - \cos(42,36^\circ)}$$

$$\gamma = 27,5^\circ$$

$$r = 0,71R$$

Разбалловка

Отмечено, что луч будет однократно отражаться	3 балла
Построен правильный геометрический рисунок для красного или фиолетового луча	2 балла
Записан угол отклонения луча	по 1 баллу для каждого цвета

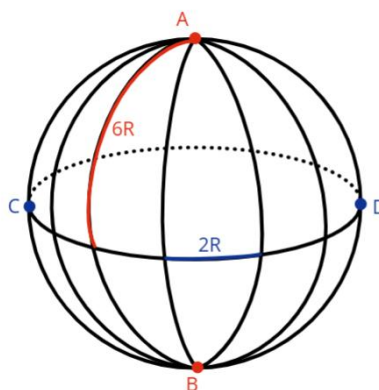
Записан закон преломления луча	по 1 баллу для каждого цвета
Правильно выражен угол преломления (β и δ)	по 2 балла за каждый угол
Составлена правильно система уравнений для нахождения r (теорема синусов или другая)	3 балла
Найдено расстояние от центра капли до точки с белым цветом	4 балла

Задача 3. Электричество.

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). В рамках электрификации планеты были проложены кабели по меридианам с шагом 30 градусов и по экватору. Михаил решил определить сопротивление получившейся электрической цепи между полюсами планеты, а Микаэль решил определить сопротивление цепи между диаметрально противоположными концами экватора. Определите, во сколько раз сопротивление, измеренное Микаэлем, будет больше, чем сопротивление, измеренное Михаилом. Все кабели изготовлены из одного и того же проводника и имеют одинаковое сечение. В точках пересечения кабелей имеются соединительные контакты, а также разъемы для подключения измерительного прибора. Землю считать идеальным шаром.

Решение:

- 1) Сделаем схематичный рисунок. Обозначим сопротивление между соседними контактами на экваторе за $2R$, тогда сопротивление между контактами на полюсе и экваторе будет в 3 раза больше.



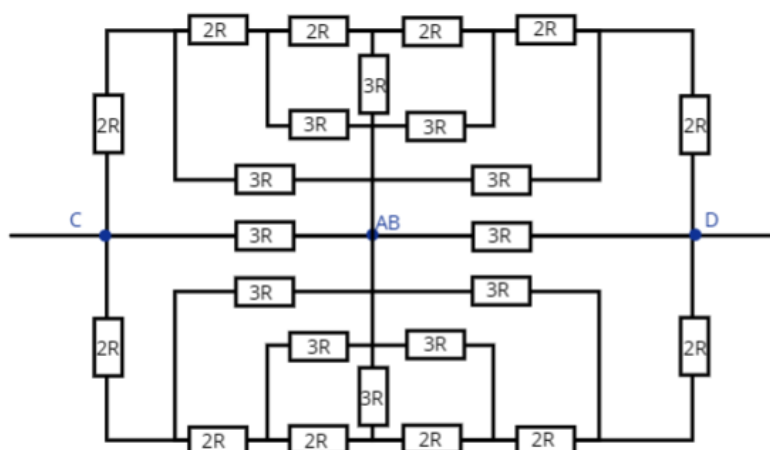
- 2) При подключении контактов к полюсам все участки провода на экваторе будут иметь одинаковый потенциал, поэтому их можно убрать. Останется параллельное подключение 12 меридианов:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{12}{12R}$$

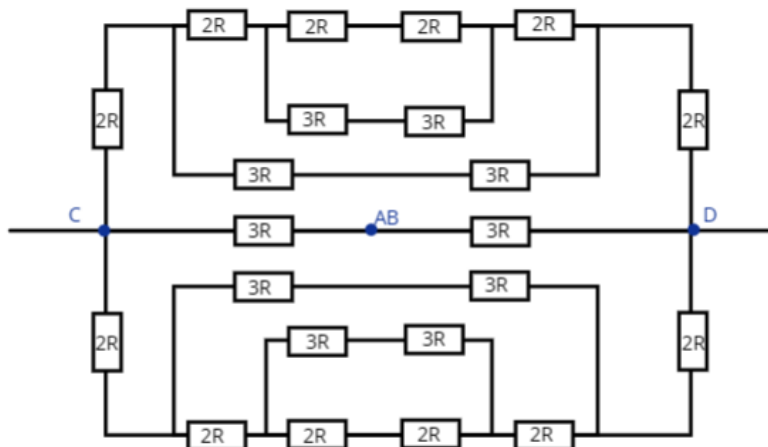
$$R_{AB} = R$$

- 3) При подключении контактов к диаметрально противоположным концам экватора точки A и B будут иметь одинаковый потенциал, поэтому их можно соединить между собой. Все участки с сопротивлением $6R$ будут идти параллельно в паре,

поэтому их сопротивление будет в 2 раза меньше. В результате получится следующая схема:



- 4) Все элементы лежащие на вертикальной оси симметрии будут иметь одинаковый потенциал, поэтому их можно убрать:



- 5) Сопротивление оставшейся схемы можно определить из последовательно-параллельных соединений:

$$R_1 = \frac{6R \cdot 4R}{6R + 4R} = 2,4R$$

$$R_2 = \frac{6,4R \cdot 6R}{6,4R + 6R} = \frac{96}{31}R$$

$$R_3 = \frac{96}{31}R + 4R = \frac{220}{31}R$$

$$\frac{1}{R_{CD}} = \frac{31}{220R} + \frac{31}{220R} + \frac{1}{6R} = \frac{74}{165R}$$

$$R_{CD} = \frac{165}{74}R$$

- 6) Итоговое отношение:

$$\frac{R_{CD}}{R_{AB}} = \frac{165}{74}$$

Разбалловка

Указание, что сопротивление между полюсом и экватором будет в 3 раза больше, чем между соседними точками экватора	3 балла
Отмечено, что при подключении к контактам полюсов сопротивление экватора можно не учитывать	2 балла
Определено сопротивление между полюсами	4 балла
Отмечено, что при подключении к точкам CD точки A и B можно соединить между собой	2 балла
Составлена эквивалентная схема с последовательно и параллельными соединениями	3 балла
Определено сопротивление между диаметрально противоположными контактами экватора	5 баллов
Итоговый ответ	1 балл

Задача 4. Термодинамика.

Условие (Кокорева Кира Александровна) (20 баллов). В отеле стоит бойлер с горячей питьевой водой. Он работает так. Когда вода нагревается до 100 градусов, нагреватель в бойлере отключается и вода начинает остывать. А когда вода остывает до 90 градусов, нагреватель снова включается. В 8 часов утра бойлер полностью заполнили кипятком. Когда нагреватель включается, бойлер начинает шуметь и постояльцы отеля вспоминают, что можно выпить чаю, и наливают горячую воду в одноразовые стаканчики одинакового объема. Когда нагреватель не работает, постояльцы не вспоминают про чай и не наливают воду. Время, которое требуется для того чтобы налить полный стаканчик воды, мало. Первый раз бойлер нагревался в течении 50 секунд. Потом – в течении 45, 38, 30, 30, 22, 19, 5 секунд. Полный бойлер остывает от 100 до 90 градусов за 5 минут. Первый постоялец проснулся в 8:07, а третий – в 8:23. Каждый постоялец пьет чай не больше одного раза за день. Стенки бойлера имеют низкую теплопроводность, а дно хорошо теплоизолировано. Считайте, что мощность теплопотерь намного меньше мощности нагревателя.

Определите, во сколько постояльцы наливали горячую воду (с точностью до секунд).

Решение:

1. Рассмотрим остывание бойлера.

Стенки бойлера имеют низкую теплопроводность, а дно хорошо теплоизолировано, значит мощность теплопотерь пропорциональна площади контакта стенок и воды (обозначим k коэффициент пропорциональности). Пусть

s – площадь дна бойлера;

h – уровень воды;

Δt – текущая разность температур воды и воздуха;

c – теплоемкость воды;

ρ – плотность воды.

Пусть за время $d\tau$ вода остыла на температуру dt .

$$\rho shc dt = kh\Delta t d\tau$$

$$dt = d\tau k \Delta t \rho s c.$$

Видно, что $d\tau$ не зависит от уровня воды h , а значит каждый раз бойлер будет остывать одно и то же время – 5 минут.

2. Рассмотрим нагрев бойлера.

Пусть на температуру dt полный бойлер нагревается за время $d\tau_0$, а неполный за время $d\tau$. Мощность нагревателя P .

$$\rho shc dt = P d\tau$$

$$\rho s H c dt = P d\tau$$

$$\text{Откуда } \frac{d\tau}{d\tau_0} = \frac{h}{H},$$

$$\tau = \frac{\tau_0 h}{H}.$$

Если воду налили через τ_1 после начала нагрева, и еще τ_2 нагрев продолжался после налива воды, то

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{\alpha \tau_0 h_1}{H} + (1 - \alpha) \frac{\tau_0 h_2}{H} \quad (1)$$

Когда бойлер нагревался в первый раз, все постояльцы еще спали, а значит 50 секунд – время нагрева полного бойлера. Времена второго, третьего и четвертого нагревов разные, значит во второй и третий нагрев наливали воду хотя бы по одному разу. Ко времени четвертого нагрева еще не проснулся третий постоялец, значит во второй и третий нагревы наливали воду ровно по одному разу.

Заметим, что время нагрева 30 секунд повторяется дважды, а значит в это время воду не наливали. При этом бойлер был наполнен на $30 / 50 = 3 / 5$ своего объема. Значит объем одного стакана равен $1 / 5$ объема бойлера.

Запишем уравнение (1) для второго нагрева.

$$45 = \alpha^1 * 50 * 1 + (1 - \alpha^1) * 50 * \frac{4}{5} \alpha^1$$

$$\alpha^1 = \frac{1}{2}$$

$$\tau_1^1 = \alpha^1 \tau_0 = 25 \text{ секунд}$$

Таким образом, первый раз воду налили в 8:11:15.

То же сделаем для третьего нагрева.

$$40 = \alpha^2 * 50 * \frac{4}{5} + (1 - \alpha^2) * 50 * \frac{3}{5} \alpha^2$$

$$\alpha^2 = \frac{4}{5}$$

$$\tau_1^2 = \alpha^2 \tau_0 \frac{4}{5} = 32 \text{ секунды}$$

Второй раз воду налили в 8:17:07

Во время четвертого и пятого нагрева воду не наливали.

Осталось три разных времени нагрева, и воды в бойлере объемом трех стаканчиков. Если бы в течении одного из нагревов воду не наливали, то время нагрева было бы кратно 10 секундам. Ни одно время не кратно 10 секундам, значит воду наливали каждый раз по одному разу. Аналогично найдем оставшиеся три времени: 8:33:16, 8:38:53, 8:40:59.

Ответ:

8:11:15, 8:17:07, 8:33:16, 8:38:53, 8:40:59.

Разбалловка

Указано, что время остывания бойлера постоянно и равно 5 минутам	2 балла
Найдено время остывания бойлера, при условии что в это время не наливали воду	3 балла
Получено выражение для времени остывания, при условии что в это время наливали воду	4 балла
Найдены времена первого и второго наливания воды	2 балла
Указано, что во время четвертого и пятого нагрева воду не наливали	2 балла
Указано, что в оставшиеся три нагрева бойлера воду наливали по одному разу	4 балла
Найдены времена третьего, четвертого и пятого наливания воды	3 балла

Задача 5. Задача-оценка

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). Оцените как можно точнее, какого объема должны быть залежи ледников на полюсе Марса, чтобы при терраформировании (процессе, в ходе которого климат Марса будет изменяться в сторону более пригодного для людей) создать концентрацию кислорода в атмосфере Марса, как на Земле. Уточните данный результат с поправкой на температуру Марса. Марс располагается от Солнца в 1,52 раза дальше, чем Земля, а постоянная Стефана-Больцмана, которая используется для расчета мощности излучения тела, равна

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}.$$

Масса Марса составляет $6,4 \cdot 10^{23}$ кг, радиус 3400 км, гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$.

Решение.

- 1) В первой случае мы будем использовать температуру Марса равной земной, тогда из Менделеева-Клапейрона следует, что при равенстве концентраций давление кислорода будет такое же, как на Земле:

$$P = nkT$$

На земле кислород составляет 21% (можно использовать 20% для простоты) от атмосферного давления. А масса молекулы воды в 18/16 раза больше массы атома кислорода. Тогда можем выразить давление кислорода на Марсе:

$$P = \frac{mg_M}{S} = \frac{mMG}{4\pi R^4}$$

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{18 \cdot 4\pi R^4 \cdot 0,2 P_A}{16 \cdot MG\rho} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 3,4^4 \cdot 10^{24} \cdot 0,2 \cdot 10^5}{6,4 \cdot 10^{23} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 900} \text{ м}^3 = 8,7 \cdot 10^{14} \text{ м}^3$$

$$= 980000 \text{ км}^3$$

- 2) Теперь учтем, что температура Марса отлична от земной. Марс, как и Земля, находится в термодинамическом равновесии, значит количество энергии, поступающей от Солнца, равно количеству энергии излучаемой самой планетой.
- 3) Количество энергии, поступающей от Солнца, будет пропорциональна доле площади Марса со сферой с радиусом равной орбите Марса

$$N_{\text{падающая}} = N_{\text{Солнца}} \cdot \frac{\pi R^2}{4\pi r_{\text{орбиты}}^2}$$

- 4) Мощность излучения можно определить из размерности постоянной Стефана-Больцмана:

$$N_{\text{излучения}} \sim \sigma \cdot R^2 \cdot T^4$$

- 5) Отсюда следует, что температура планет зависит только от радиуса орбиты, причем следующим образом:

$$T \sim \frac{1}{\sqrt{r_{\text{орбиты}}}}$$

- 6) Поскольку Марс располагается в 1,52 раза дальше от Земли, то температура его поверхности будет в 1,23 раза меньше, чем на Земле. Значит для равенства

концентраций необходимо увеличить давление в 1,23 раза, следовательно объём льда необходимый для терраформации будет составлять уже:

$$V_{\text{итог}} = 1,23V = 1200000 \text{ км}^3$$

Разбалловка.

Указана связь между давлением и концентрацией	1 балл
Выражено давление атмосферы через массу кислорода	2 балла
Учтено, что g на Марсе будет другое	2 балла
Указано, что кислород составляет 20% ($\pm 2\%$) от воздуха	2 балла
Найден объём льда без учета отличия температуры	4 балла
Указано, что планета располагается в термодинамическом равновесии	2 балла
Получена зависимость температуры от радиуса орбиты	3 балла
Получен ответ с учетом отличия температуры	4 балла