

9 класс. Решения.

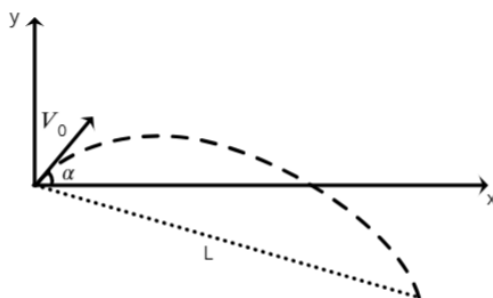
Каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Механика.

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). Два горных племени враждуют между собой. В рамках гонки вооружений они разработали аналогичные по характеристикам пушки и установили их у хижин вождей. После очередного конфликта аборигены первого племени выстрелили из своей пушки под углом 30 градусов к горизонту, в результате чего через время $t_1 = 14$ с после выстрела ядро попало точно в хижину вождя второго племени. При этом задержка между звуком выстрела и попаданием ядра для жителей второй деревни составила $t_2 = 11$ с. Раздосадованные жители второго племени горят желанием нанести ответный удар. Определить, во сколько раз необходимо увеличить энергию выстрела, чтобы попасть в хижину вождя первого племени, если выстрел будет производиться под углом 60 градусов к горизонту таким же ядром. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$, скорость звука $c = 333 \text{ м/с}$. Хижины вождей находятся в зоне прямой видимости.

Решение:

- 1) Отметим, что в общем случае совсем не обязательно, чтобы племена располагались на одинаковой высоте. Кроме того, следует обратить внимание на то, что ядро летит по параболической траектории, а фронт звуковой волны движется прямолинейно, поскольку хижины вождей расположены в зоне прямой видимости.



- 2) Пусть система отсчета связана с хижинкой вождя первого племени. Запишем выражения для траектории движения ядра:

$$x(t) = V_0 \cos(\alpha) t$$

$$y(t) = V_0 \sin(\alpha) t - \frac{gt^2}{2}$$

Через промежуток времени t_1 ядро попадет в хижину вождя второго племени, которая находится на расстоянии $L = \sqrt{(x(t_1))^2 + (y(t_1))^2}$ от места выстрела. Звук

то же расстояние пройдет по прямой за время $t_1 - t_2$: $L = c(t_2 - t_1)$. Решаем уравнение:

$$c(t_2 - t_1) = \sqrt{(V_0 \cos(\alpha) t_1)^2 + \left(V_0 \sin(\alpha) t_1 - \frac{g(t_1)^2}{2}\right)^2}$$

$$V_0 = 71,41 \text{ м/с}$$

- 3) С использованием формул из предыдущего пункта и начальной скорости ядра пушки первого племени можно вычислить, что ядро пролетело по горизонтали около 865 м и опустилось ниже высоты, на которой расположена хижина вождя первого племени, примерно на 480 м. Ядро, которое собираются запустить жители второго племени, должно преодолеть то же расстояние по горизонтали и в конечном итоге подняться по вертикали на те же 480 м, будучи отправленным под углом 60 градусов:

$$x_1 = x_2$$

$$y_1 = -y_2$$

$$V_0 \cos(\alpha) t_1 = V \cos(\beta) t_2$$

$$V_0 \sin(\alpha) t_1 - \frac{g t_1^2}{2} = -V \sin(\beta) t_2 + \frac{g t_2^2}{2}$$

$$V = 130,1 \text{ м/с}$$

- 4) Отношение энергий:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{V^2}{V_0^2} = 3,32$$

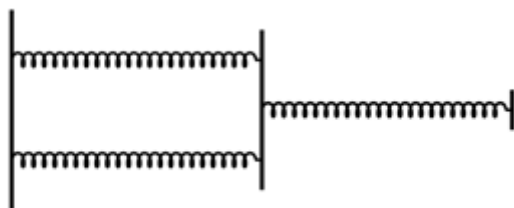
Разбалловка

Указано, что племена располагаются на разной высоте	4 балла
Уравнение движения по оси x	2 балла
Уравнение движения по оси y	2 балла
Найдена скорость ядра в первом случае	4 балла
Отмечено, что по осям x и y будут одинаковые по модулю перемещения	2 балла
Найдена скорость во втором случае	4 балла
Найдено отношение энергий	2 балла

Задача 2. Механика.

Условие (Кокорева Кира Александровна) (20 баллов). Негуковский упругий элемент изготовили следующим образом. Сначала обычную пружину последовательно соединили с нерастяжимой нитью, а затем полученную конструкцию параллельно соединили с еще одной пружиной. Длины каждой из пружин и нити равны $l = 2$ см. Коэффициент жесткости одной пружины $k = 100$ Н/м. Далее, три таким образом изготовленных одинаковых упругих элемента соединяют в систему так: два соединяют параллельно, и к ним последовательно присоединяют третий (см. рисунок). Найдите зависимость удлинения от приложенной силы

для упругого элемента, который надо параллельно подсоединить к получившейся системе, чтобы она оказалась эквивалентна пружине с коэффициентом жесткости $2k$. Можно ли такую пружину получить из гуковских пружин и нерастяжимых нитей? Если можно, найдите коэффициенты жесткости и длины этих пружин.



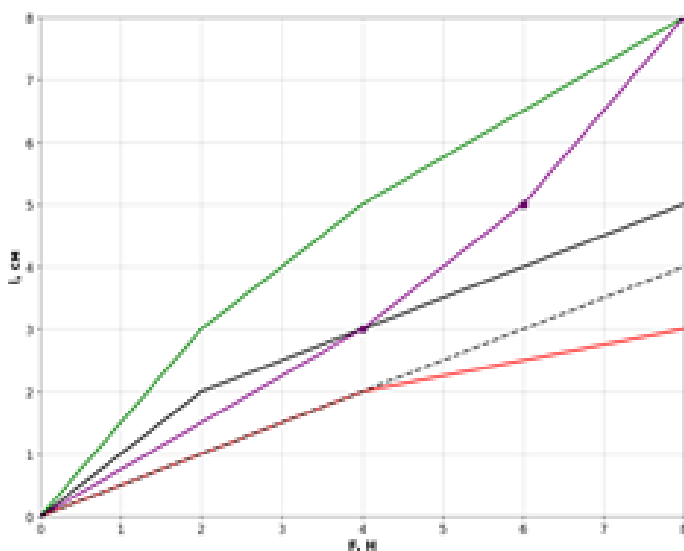
Решение: Найдем зависимость удлинения от силы для одного сложного негуковского упругого элемента. Пока нить не натянута, коэффициент жёсткости равен k . Нить провисает при удлинении меньше, чем 2 см. При удлинениях больших, чем 2 см, дифференциальный коэффициент жесткости равен $2k$. Соответствующая зависимость показана на графике черным цветом.

Найдем зависимость удлинения от силы для двух сложных негуковских упругих элементов, соединенных параллельно. Для такого же удлинения теперь надо приложить в два раза большую силу. Соответствующая зависимость показана на графике красным цветом.

Теперь найдем зависимость удлинения от силы для всей системы. Она состоит из двух последовательно соединенных негуковских упругих элементов (красная зависимость) и одного негуковских упругих элементов. Чтобы получить удлинение всей системы при некоторой силе, надо сложить удлинения одного последовательно к двум параллельно соединенным негуковским упругим элементам при этой силе. Это легко сделать графически (зеленая зависимость на графике).

Пунктиром обозначена зависимость, которая должна получиться. При каждом удлинении вычтем из необходимой приложенной силы силу, которую прикладывают к системе трех сложных негуковских упругих элементов. Так получим искомую зависимость. (Сиреневая зависимость на графике.)

Такой пружину нельзя получить из гуковских пружин и нерастяжимых нитей, так как дифференциальный коэффициент жесткости увеличивается при увеличении силы.

**Разбалловка**

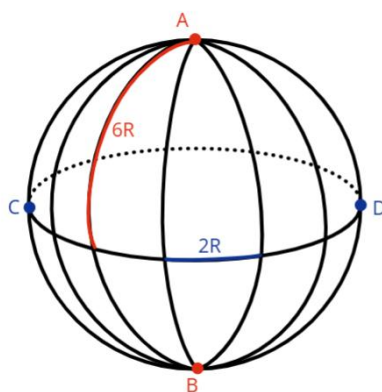
Найдена зависимость удлинения от силы для одной сложной пружины	4 балла
Найдена зависимость удлинения от силы для двух сложных пружин, соединенных параллельно	4 балла
Найдена зависимость удлинения от силы для всей системы	4 балла
Найдена искомая зависимость удлинения от силы	5 баллов
Обосновано указано, что такую пружину нельзя получить из гукских пружин и нерастяжимых нитей	3 балла

Задача 3. Электричество.

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). В рамках электрификации планеты были проложены кабели по меридианам с шагом 30 градусов и по экватору. Михаил решил определить сопротивление получившейся электрической цепи между полюсами планеты, а Микаэль решил определить сопротивление цепи между диаметрально противоположными концами экватора. Определите, во сколько раз сопротивление, измеренное Микаэлем, будет больше, чем сопротивление, измеренное Михаилом. Все кабели изготовлены из одного и того же проводника и имеют одинаковое сечение. В точках пересечения кабелей имеются соединительные контакты, а также разъемы для подключения измерительного прибора. Землю считать идеальным шаром.

Решение:

- 1) Сделаем схематичный рисунок. Обозначим сопротивление между соседними контактами на экваторе за $2R$, тогда сопротивление между контактами на полюсе и экваторе будет в 3 раза больше.

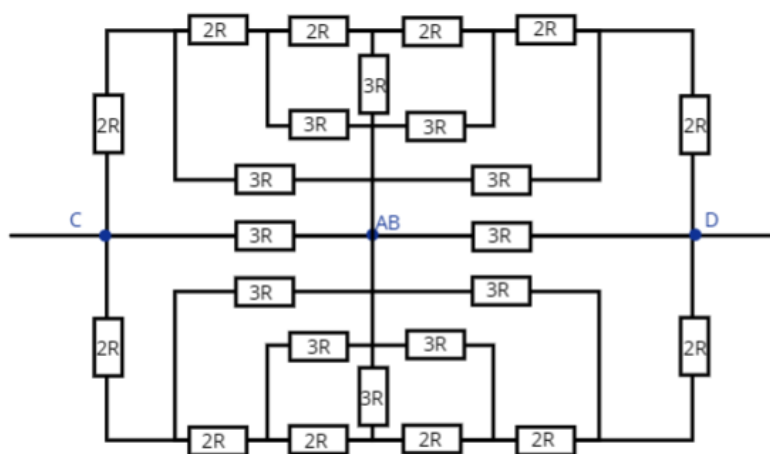


- 2) При подключении контактов к полюсам все участки провода на экваторе будут иметь одинаковый потенциал, поэтому их можно убрать. Останется параллельное подключение 12 меридианов:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{12}{12R}$$

$$R_{AB} = R$$

- 3) При подключении контактов к диаметрально противоположным концам экватора точки A и B будут иметь одинаковый потенциал, поэтому их можно соединить между собой. Все участки с сопротивлением $6R$ будут идти параллельно в паре, поэтому их сопротивление будет в 2 раза меньше. В результате получится следующая схема:



- 4) Все элементы лежащие на вертикальной оси симметрии будут иметь одинаковый потенциал, поэтому их можно убрать:



- 5) Сопротивление оставшейся схемы можно определить из последовательно-параллельных соединений:

$$R_1 = \frac{6R \cdot 4R}{6R + 4R} = 2,4R$$

$$R_2 = \frac{6,4R \cdot 6R}{6,4R + 6R} = \frac{96}{31}R$$

$$R_3 = \frac{96}{31}R + 4R = \frac{220}{31}R$$

$$\frac{1}{R_{CD}} = \frac{31}{220R} + \frac{31}{220R} + \frac{1}{6R} = \frac{74}{165R}$$

$$R_{CD} = \frac{165}{74}R$$

- 6) Итоговое отношение:

$$\frac{R_{CD}}{R_{AB}} = \frac{165}{74}$$

Разбалловка

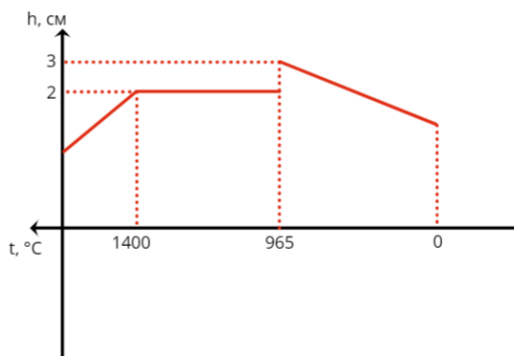
Указание, что сопротивление между полюсом и экватором будет в 3 раза больше, чем между соседними точками экватора	3 балла
Отмечено, что при подключении к контактам полюсов сопротивление экватора можно не учитывать	2 балла
Определено сопротивление между полюсами	4 балла
Отмечено, что при подключении к точкам CD точки A и B можно соединить между собой	2 балла

Составлена эквивалентная схема с последовательно и параллельными соединениями	3 балла
Определено сопротивление между диаметрально противоположными контактами экватора	5 баллов
Итоговый ответ	1 балл

Задача 4. Термодинамика.

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). В калориметре плавает лёд в форме цилиндра так, что его основания параллельны дну калориметра. Сверху на этот лёд кладут на основание нагретый цилиндр из никеля массой 17,8 г. На графике приведена зависимость высоты h верхнего основания ледяного цилиндра над поверхностью воды от температуры никелевого цилиндра. Определите по этим данным:

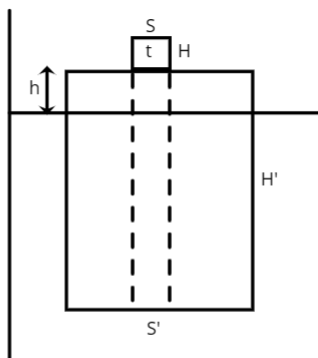
1. начальную температуру никеля;
2. начальную массу льда;
3. начальную и конечную высоту h на графике.



Удельная теплота плавления льда $330 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$, удельная теплоёмкость никеля $500 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}^\circ\text{C}}$, плотность льда $900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность никеля $8900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность воды $1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Считать, что процесс теплопередачи идет только через основание цилиндра (передачей тепла через боковую поверхность пренебречь), а вода стекает с поверхности льда мгновенно.

Решение:

- 1) Обозначим высоту и площадь цилиндра из никеля и льда, как указано на рисунке:



- 2) На первом участке графика никель плавит лёд, а избыток воды стекает с поверхности льда. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока никель не погрузится в лёд на весь свой объем:

$$HS\rho_{\text{л}}\lambda = HS\rho_{\text{н}}c_{\text{н}}\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\rho_{\text{л}}\lambda}{\rho_{\text{н}}c_{\text{н}}} = 66,7^{\circ}\text{C}$$

Значит начальная температура никеля составляет $t_1 = 1466,7^{\circ}\text{C}$

- 3) На втором участке никель плавит лёд, а растаявшая вода остается над ним. Суммарная масса не меняется, поэтому и не меняется уровень воды. Этот процесс закончится, когда никель пробьет дно и выпадет из цилиндра. После этого лёд всплывет и будет располагаться на 10% над поверхностью воды. Значит начальная высота льда составляет $H' = 30$ см. За это время лёд расплавит весь объем под собой:

$$SH'\rho_{\text{л}}\lambda = mc_{\text{н}}(t_1 - t_3)$$

$$S = 0,5 \text{ см}^2$$

$$H = \frac{m}{\rho S} = 4 \text{ см}$$

- 4) Теперь можем записать условие плавания оставшегося льда и никеля на втором участке:

$$(m_{\text{л}} + m_{\text{н}})g = F_A$$

$$(H'S' - HS)\rho_{\text{л}} + HS\rho_{\text{н}} = (H' - h_2)S'\rho_{\text{в}}$$

$$S' = 16 \text{ см}^2$$

$$m_{\text{л.н.}} = H'S'\rho_{\text{л}} = 432 \text{ г}$$

- 5) Для того, чтобы определить начальную высоту на графике мы можем записать условие плавания льда и никеля:

$$(m_{\text{л.н.}} + m_{\text{н}})g = F'_A$$

$$H'S'\rho_{\text{л}} + HS\rho_{\text{н}} = (H' - h_1)\rho_{\text{в}}$$

$$h_1 = 1,89 \text{ см}$$

- б) Конечную высоту можно определить, если посчитать кол-во растаявшего льда к концу процесса:

$$\Delta H(S' - S)\rho_{\text{л}}\lambda = mc_{\text{н}}(t_3 - 0)$$

$$\Delta H = 1,86 \text{ см}$$

Отметим, что это изменение высоты всего полого цилиндра льда, значит изменение высоты над поверхностью составит всего 10%. Конечная высота будет:

$$h_{\text{к}} = (H_3 - \Delta H) \cdot 0,1 = 2,81 \text{ см}$$

Разбалловка

Записано уравнение теплового баланса для 1 участка	3 балла
Найдена начальная температура никеля	2 балла
Определена начальная высота льда	2 балла
Записано уравнение теплового баланса для 2 участка	3 балла
Найдена начальная масса льда	2 балла
Записано условие плавления льда и никеля в начале	2 балла
Найдена начальная высота на графике	2 балла
Записано уравнение теплового баланса для последнего участка	2 балла
Найдена конечная высота на графике	2 балла

Задача 5. Задача-оценка

Условие (Галиуллин Арслан Анварович) (20 баллов). Наблюдая за работой профессионального пиццайоло, юный физик заметил, что повар раскручивает диск из теста в воздухе, чтобы придать ему нужную форму. Однако, если раскрутить тесто слишком сильно или попытаться сделать пиццу слишком большого диаметра, диск разрывается в полете. Известно, что тесто ведет себя как неньютоновская жидкость, но при быстрых деформациях (как при раскрутке) оно проявляет свойства твердого тела и имеет определенный предел прочности на разрыв.

Оцените величину этого предела прочности (механического напряжения) σ в Паскалях. Для оценки используйте разумные параметры, взятые из жизненного опыта.

Решение.

Для оценки предела прочности σ необходимо связать его с параметрами, описывающими вращение пиццы в момент, близкий к разрыву.

1) **Получение формулы методом размерностей.** Критическое напряжение σ должно зависеть от плотности материала ρ , угловой скорости вращения ω и радиуса диска R . Важно отметить, что толщина теста h не должна входить в итоговую формулу напряжения (она сокращается в отношении силы к площади).

Будем искать зависимость в виде: $\sigma \sim \rho^\alpha \cdot \omega^\beta \cdot R^\gamma$. Запишем размерности величин в СИ:

$$[\sigma] = \text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = ML^{-3}$$

$$[\omega] = \frac{1}{\text{с}} = T^{-1}$$

$$[R] = \text{м} = L$$

Составим уравнение размерностей:

$$M^1L^{-1}T^{-2} = (ML^{-3})^\alpha \cdot (T^{-1})^\beta \cdot (L)^\gamma$$

Приравниваем показатели степеней:

$$\begin{cases} \text{для } M: & 1 = \alpha \\ \text{для } T: & -2 = -\beta \\ \text{для } L: & -1 = -3\alpha + \gamma \end{cases}$$

Отсюда получаем: $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 2$. Формула для оценки (с точностью до коэффициента порядка единицы):

$$\sigma \approx \rho \omega^2 R^2$$

2) Оценка параметров из жизненного опыта.

Плотность теста (ρ). Тесто чуть плотнее воды (или легче из-за газов). Оценка: $\rho \approx 1000 \text{ кг/м}^3$.

Радиус пиццы (R). Обычная пицца имеет диаметр 30–40 см. Предельный радиус перед разрывом (для очень большой пиццы): $R \approx 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$.

Частота вращения. Быстрее 1 оборота в секунду, но глаз следит. Оценим частоту $\nu \approx 2 \text{ об/с}$. Угловая скорость: $\omega = 2\pi\nu \approx 6 \cdot 2 = 12 \text{ рад/с}$.

3) Расчет.

$$\sigma \approx 1000 \cdot (12)^2 \cdot (0,2)^2 \approx 1000 \cdot 144 \cdot 0,04 \approx 5760 \text{ Па}$$

Ответ: Предел прочности теста составляет по порядку величины $5 \cdot 10^3 - 10^4 \text{ Па}$ (5–10 кПа).

Разбалловка.

Указаны параметры, от которых зависит прочность (ρ, ω, R)	3 балла
Составлена система уравнений для размерностей	4 балла
Обосновано отсутствие зависимости от толщины теста	3 балла
Получена формула $\sigma \sim \rho \omega^2 R^2$	3 балла
Приведены разумные численные оценки параметров (ρ, R, ν)	5 баллов
Получен численный ответ правильного порядка (единицы кПа)	2 балла