ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2024 года

БИЛЕТ № 06 (10 классы): решения и критерии.

Критерии оценивания:

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

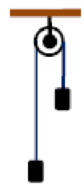
Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

Максимальная оценка за работу: 100 баллов.

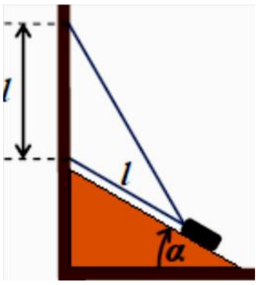
УСЛОВИЯ, ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧИСЛЯЕМЫХ БАЛЛОВ ДЛЯ ЗАДАЧ:

Задание 1:



Вопрос: Легкая леска составлена из двух однородных участков одинаковой массы, изготовленных из одинакового пластика. Длина одного участка в три раза больше, чем другого. Эту леску перекинули через идеальный блок и уравновесили двумя грузами, массы которых очень сильно превосходят массу лески. В состоянии равновесия общее растяжение лески равно 1 мм. Каково растяжение каждого из участков? Считайте, что леска подчиняется закону Гука.

Задача: Тяжелый груз, помещенный на плоскость, наклоненную под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, удерживается двумя отрезками одной легкой однородной лески, вторые концы которых закреплены на вертикальной стене. Расстояние между точками закрепления равно длине нижнего отрезка в недеформированном состоянии, коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью $\mu = 0{,}4$. Длина верхнего участка лески такова, что при плавном перемещении груза по поверхности (вдоль линии «падения воды» в одной вертикальной плоскости с точками закрепления) оба участка натягиваются одновременно. Исследуйте, какие значения может принимать величина силы натяжения нижнего отрезка лески в положении равновесия этой системы и определите отношение ее максимального и минимального значений. Опишите способ, с помощью которого можно привести систему в положение равновесия с максимально возможной величиной силы натяжения нижнего отрезка лески. Величины деформаций отрезков лески намного меньше их длин, но много больше величин деформаций стенки, груза и поверхности.

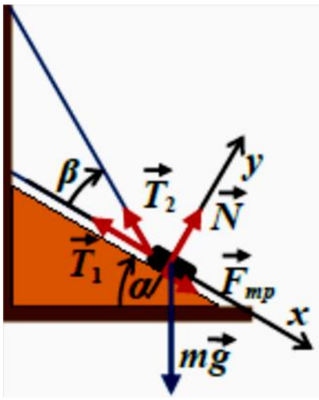


Ответ на вопрос: Ясно, что сила натяжения в разных сечениях лески практически одинакова. Так как массы участков одинаковы, а длины отличаются в три раза, то в три раза отличаются и площади их поперечного сечения (площадь сечения более короткого участка больше). Коэффициент жесткости участка лески прямо пропорционален площади сечения и обратно пропорционален его длине, так что коэффициент жесткости более короткого участка в 9 раз больше, чем у более длинного. Значит, растяжение более короткого участка в 9 раз меньше, чем у более длинного, а в сумме их растяжения дают 1 мм. Итак, растяжение более короткого участка равно 0,1 мм, а более длинного – 0,9 мм.

Решение задачи: Пусть β – угол между нитями в положении равновесия. Из геометрии ясно, что $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} = 30°$. Запишем условия равновесия груза в проекции на оси x и y, показанные на рисунке:

$$\begin{Bmatrix} mg \cdot \sin(\alpha) + F_{mp} - T_1 - T_2 \cdot \cos(\beta) = 0 \\ T_2 \cdot \sin(\beta) + N - mg \cdot \cos(\alpha) = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T_1 + T_2 \cdot \cos(\beta) = mg \cdot \sin(\alpha) + F_{mp} \\ N = mg \cdot \cos(\alpha) - T_2 \cdot \sin(\beta) \end{cases}.$$

Отметим, что в этих уравнениях число неизвестных сил реакции явно больше числа уравнений, то есть определить эти силы однозначно нельзя. К этим уравнениям можно добавить условие равновесия моментов сил, но для его записи потребуется дополнительная информация (о форме груза и положении точек закрепления концов нитей), и оно в действительности будет определять положение точки приложения силы нормальной реакции поверхности. По условию равновесие имеет место, так что неизвестные нам параметры системы таковы, что это уравнение выполнено. При этом у почти всех сил реакции ($T_{1,2}$ и N) известны направления в положении равновесия – кроме силы трения, направление которой зависит от «предистории» образования состояния равновесия. Поэтому сразу договоримся, что у силы нормальной реакции и сил натяжения информация о направлении уже учтена (и в записанных уравнениях они положительны), а сила трения записана в проекции на ось x.



Геометрия системы и информация о деформациях позволяет установить соотношение сил натяжения второй (верхней) и первой (нижней) нитей. В самом деле, путь растяжение первой нити в положении равновесия равно Δl_1. Длина второй нити в недеформированном состоянии равна $2l \cdot \cos(\beta)$, а положении равновесия, как следует из теоремы косинусов

$$[2l \cdot \cos(\beta) + \Delta l_2]^2 = l^2 + [l + \Delta l_1]^2 + 2l(l + \Delta l_1) \cdot \cos(2\beta).$$

Оставляя слагаемые первого порядка по малым деформациям, получаем: $\Delta l_2 = \Delta l_1 \cdot \cos(\beta)$. Коэффициенты жесткости отрезков одной и той же нити обратно пропорциональны их длинам в недеформированном состоянии, то есть $\frac{k_2}{k_1} = \frac{l}{2l \cdot \cos(\beta)} = \frac{1}{2 \cdot \cos(\beta)}$. Значит:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{k_2 \Delta l_2}{k_1 \Delta l_1} = \frac{1}{2}.$$

В результате находим, что $N = mg \cdot \cos(\alpha) - \frac{1}{2} T_1 \cdot \sin(\beta)$. Сила трения в положении равновесия удовлетворяет условию

$$|F_{mp}| \le \mu N \Rightarrow \mu \left[\frac{1}{2} T_1 \cdot \sin(\beta) - mg \cdot \cos(\alpha)\right] \le F_{mp} \le \mu \left[mg \cdot \cos(\alpha) - \frac{1}{2} T_1 \cdot \sin(\beta)\right].$$

Таким образом,

$$T_1[2 + \cos(\beta)] = 2mg \cdot \sin(\alpha) \pm 2\mu mg \cdot \cos(\alpha) \mp \mu T_1 \cdot \sin(\beta),$$

и максимальная величина силы натяжения нижней нити равна

$$T_1^{max} = \frac{\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha)}{2 + \cos(\beta) + \mu \cdot \sin(\beta)} 2mg = \frac{5 + 2\sqrt{3}}{22 + 5\sqrt{3}} 2mg.$$

Аналогично минимальная

$$T_1^{min} = \frac{\sin(\alpha) - \mu \cdot \cos(\alpha)}{2 + \cos(\beta) - \mu \cdot \sin(\beta)} 2mg = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{18 + 5\sqrt{3}} 2mg,$$

и поэтому их отношение

$$\frac{T_1^{max}}{T_1^{min}} = \frac{\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha)}{2 + \cos(\beta) + \mu \cdot \sin(\beta)} \frac{2 + \cos(\beta) - \mu \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha) - \mu \cdot \cos(\alpha)} = \frac{5 + 2\sqrt{3}}{22 + 5\sqrt{3}} \cdot \frac{18 + 5\sqrt{3}}{5 - 2\sqrt{3}} \approx 4{,}79.$$

Ясно, что для максимальности силы натяжения нужно, чтобы сила трения была направлена по оси x (вниз) и иметь максимальную для силы трения покоя величину. Для реализации такого состояния равновесия необходимо сдвинуть груз вниз, приложив силу, направленную воль оси х, растянув отрезки нити настолько, чтобы при отпускании груза он начинал бы скользить вверх за счет сил натяжения нити. Затем нужно плавно уменьшать прикладываемую силу, чтобы груз очень медленно скользил вверх до положения, в котором сила трения превратится в силу трения покоя, которая при максимальной величине удержит груз в состоянии равновесия.

Критерии для задачи:

I	Правильно указаны все силы, действующие на груз	**1**
	Указано (используется в решении), что силы реакции не определяются однозначно из условий равновесия	**1**
	Соотношение сил натяжения отрезков ищется через соотношение коэффициентов жесткости и соотношение величин деформаций	**1**
	Указано (используется в решении), что коэффициенты жесткости отрезков обратно пропорциональны их длинам	**1**
	Указано (используется в решении), что различие максимальной и минимальной величин сил натяжения связано с возможностью разного направления силы трения покоя	**3**
	Правильно записаны выражения для границ значений проекции силы трения покоя	**2**
	Правильно описан способ создания состояния равновесия с максимальной величиной T_1	**1**
II	Правильно записаны условия равновесия груза	**1+1=2**
	Найдено соотношение величин деформаций отрезков	**2**
	Правильно найдено отношение сил натяжения отрезков	**2**
	Получен правильный аналитический ответ	**2**
	Получен правильный численный ответ	**2**
	ВСЕГО	**20**

Примечание: Некоторые участники восприняли слова «отрезки нити» как описание «математического» (а не реального) деления нити, то есть считали, что груз подвешен на единой нити со скользящим прикреплением (например, эта нить перекинута через блок, ось которого прикреплена к грузу). Но мнению жюри, такое понимание противоречит условию. Кроме того, таким образом задача существенно упрощается: в этом случае в условии равновесия можно сразу считать $T_2 \equiv T_1$, и исследование механических свойств отрезков не требуется. Тогда мы приходим к соотношениям

$$\mu[T_1 \cdot \sin(\beta) - mg \cdot \cos(\alpha)] \le F_{mp} \le \mu[mg \cdot \cos(\alpha) - T_1 \cdot \sin(\beta)]$$

и

$$T_1[1 + \cos(\beta)] = mg \cdot \sin(\alpha) \pm \mu mg \cdot \cos(\alpha) \mp \mu T_1 \cdot \sin(\beta).$$

Следовательно, в этом случае «крайние» значения величины силы натяжения нижней нити

$$T_1^{max} = \frac{\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha)}{1 + \cos(\beta) + \mu \cdot \sin(\beta)} mg = \frac{5 + 2\sqrt{3}}{12 + 5\sqrt{3}} mg,$$

$$T_1^{min} = \frac{\sin(\alpha) - \mu \cdot \cos(\alpha)}{1 + \cos(\beta) - \mu \cdot \sin(\beta)} mg = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{8 + 5\sqrt{3}} mg,$$

и в итоге отношение этих величин

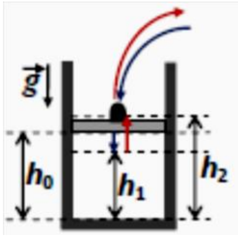
$$\frac{T_1^{max}}{T_1^{min}} = \frac{\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha)}{1 + \cos(\beta) + \mu \cdot \sin(\beta)} \frac{1 + \cos(\beta) - \mu \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha) - \mu \cdot \cos(\alpha)} = \frac{5 + 2\sqrt{3}}{12 + 5\sqrt{3}} \cdot \frac{8 + 5\sqrt{3}}{5 - 2\sqrt{3}} \approx 4{,}44.$$

В этом случае пункты, связанные с определением соотношения сил натяжений (**1+1+2+2=6 баллов**) не засчитывались (вместо них можно было поставить **1 балл** за предложение хотя бы в какой-то степени разумной аргументации такого толкования условия), но жюри приняло решение, что остальные пункты при их правильном выполнении в рамках такого решения должны засчитываться. Таким образом, максимальная оценка за решение задачи с таким изменением условия равнялась **15 баллам**.

Задание 2:

Вопрос: Какие значения может принимать показатель адиабаты для идеального газа?

Задача: В цилиндрическом сосуде с гладкими теплоизолирующими вертикальными стенками под горизонтальным теплоизолирующим поршнем находится воздух. Изначально поршень находится в равновесии, и расстояние между нижней поверхностью поршня и дном сосуда равно h_0 = 30 см. На поршень аккуратно поставили небольшую гирьку, и он начал опускаться. В тот момент, когда поршень достиг наинизшего положения на высоте h_1 = 29 см над дном сосуда, гирьку так же аккуратно убрали. До какой максимальной высоты h_2 поднимется поршень после этого? Вязкостью воздуха можно пренебречь, воздух можно считать двухатомным идеальным газом, происходящие с ним процессы – квазиравновесными, а изменениями внешнего атмосферного давления можно пренебречь.



Математическая подсказка: При $|\alpha| \lesssim 1$ и $\varepsilon \ll 1$ с ошибкой порядка $|\varepsilon|^3$ справедлива приближенная формула $(1+\varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot \varepsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\varepsilon^2$.

Ответ на вопрос: Внутренняя энергия идеального газа может быть описана формулой $U = \frac{i}{2}pV$, в которой i – число классических степеней свободы молекулы газа, равное 3 для одноатомных молекул, 5 для двухатомных и 6 для «многоатомных». Так как в адиабатическом процессе теплообмен отсутствует, то для бесконечно малого участка процесса

$$\delta Q = p \cdot \Delta V + \Delta\left(\frac{i}{2}pV\right) = \frac{i+2}{2}p \cdot \Delta V + \frac{i}{2}V \cdot \Delta p = 0.$$

Если ввести величину $\gamma \equiv \frac{i+2}{i}$, то это соотношение можно переписать в форме

$$p \cdot \gamma V^{\gamma-1}\Delta V + V^\gamma \cdot \Delta p = \Delta(p \cdot V^\gamma) = 0 \Leftrightarrow p \cdot V^\gamma = const.$$

Мы получили уравнение адиабаты в координатах давление-объем и установили, что показатель адиабаты для классического идеального газа равен $\gamma \equiv \frac{i+2}{i}$, то есть он может принимать значения $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{5}$ и $\frac{4}{3}$.

Решение задачи: Пусть S – сечение цилиндра, M – масса поршня, m – масса гирьки, p_A – атмосферное давление. Начальное давление азота в сосуде $p_0 = p_A + \frac{Mg}{S}$. В процессе опускания поршня с высоты h_0 до высоты $h_1 \equiv x\cdot h_0$ в условиях теплоизоляции внутренняя энергия азота растет за счет работы внешнего давления и силы тяжести (кинетическая энергия поршня и гирьки в обоих положениях равна нулю):

$$\frac{5}{2}p_0Sh_0 + [(M+m)g + p_AS]h_0(1-x) = \frac{5}{2}p_1Sh_0x,$$

то есть, если обозначить $\delta \equiv \frac{mg}{p_0S}$

$$x\frac{p_1}{p_0} = 1 + \frac{2}{5}(1+\delta)(1-x).$$

С учетом уравнения адиабаты (для двухатомного газа γ=7/5) $p_1 = p_0 \cdot x^{-\gamma}$, и поэтому

$$x^{-2/5} - 1 = [1-(1-x)]^{-2/5} - 1 = \frac{2}{5}(1+\delta)(1-x).$$

Отметим, что $1 - x = \frac{1}{30} \ll 1$, так что, воспользовавшись математической подсказкой, находим, что с ошибкой порядка $(1/30)^3$ величина $\delta \approx \frac{7}{10}(1-x) = \frac{7}{300}$.

В процессе подъема поршня от высоты $h_1 \equiv x\cdot h_0$ до высоты $h_2 \equiv z\cdot h_0$ аналогично

$$\frac{5}{2}p_1Sxh_0 - [Mg + p_AS]h_0(z-x) = p_0Sh_0\left[\frac{5}{2}x^{-2/5} + x - z\right] = \frac{5}{2}p_2Sh_0z = \frac{5}{2}p_0Sh_0 \cdot z^{-2/5}.$$

Следовательно,

$$z^{-\frac{2}{5}} + \frac{2}{5}z = \frac{2}{5}x + 1 + \frac{2}{5}(1+\delta)(1-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [1+(z-1)]^{-2/5}+\frac{2}{5}(z-1)=1+.\frac{2}{5}\delta(1-x)$$

Естественно ожидать, что отличие z от единицы тоже будет малым: $z-1\equiv\varepsilon\ll 1$, и

$$\frac{7}{25}\varepsilon^2\approx\frac{2}{5}\delta(1-x)\Rightarrow\varepsilon\approx\sqrt{\frac{10}{7}\delta(1-x)}\approx 1-x=\frac{1}{30}.$$

Таким образом, $h_2\approx 2h_0-h_1=31$ см.

Возможный вариант решения задачи: Использование «математической подсказки» при вычислении связи давления с высотой положения поршня приводит к тому, что силы, действующие на поршень, оказываются линейными функциями его координаты. Поэтому в таком приближение движение поршня можно считать «почти гармоническим» и при его анализе заменить силу, действующую со стороны воздуха, на силу упругости «пружины». Тогда ясно, что после включения дополнительной постоянной нагрузки, которая вызывает смещение поршня от положения равновесия до остановки и последующего снятия этой нагрузки, поршень вернется в положение равновесия, набрав скорость и после этого пройдет «за» это положение до остановки еще точно такое же расстояние. Поэтому $h_2\approx 2h_0-h_1=31$ см.

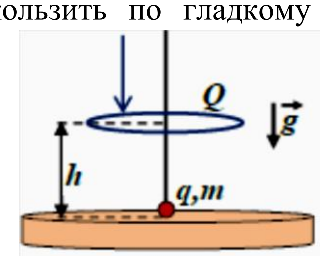
Критерии для задачи:

I	Используется правильная форма записи внутренней энергии двухатомного идеального газа	**1**
	Указано (используется в решении) что кинетическая энергия поршня (с гирькой или без) обращается в ноль в точках остановки поршня	**1**
	Правильно записан ЗСЭ для опускания поршня	**4**
	Правильно записан ЗСЭ для подъема поршня	**4**
II	Используется формула для начального давления азота через атмосферное давление и вес поршня	**1**
	Записано (используется в решении) уравнение адиабаты или эквивалентное уравнение	**2**
	Для нахождения нужных параметров системы (типа δ) корректно используется «математическая подсказка»	**3**
	Получен правильный аналитический ответ ($h_2\approx 2h_0-h_1$ или эквивалентный)	**2**
	Получен правильный численный ответ	**2**
	ВСЕГО	**20**

Задание 3:

Вопрос: В каком случае взаимодействие электрических зарядов можно считать потенциальным?

Задача: Маленькая бусинка с массой m и зарядом $q>0$ может скользить по гладкому непроводящему стержню, установленному вертикально на горизонтальной непроводящей поверхности. Изначально бусинка покоится в самом нижнем положении (см. рисунок). Непроводящее кольцо радиуса a, по которому равномерно распределен отрицательный заряд, размещают на большой высоте над поверхностью так, что его плоскость горизонтальна, а ось совпадает с осью стержня. Затем кольцо очень медленно опускают на поверхность, перемещая его поступательно вдоль вертикальной оси.



1) При какой величине заряда кольца $|Q|$ бусинка не придет в движение вплоть до касания кольца и поверхности? Ускорение свободного падения равно g, электрическая постоянная ε_0.

2) Величину заряда кольца выбрали так, что бусинка пришла в движение, когда кольцо оказалось на высоте $h=a=24$ см над поверхностью. Найдите максимальную возможную высоту, на которую может подняться бусинка в ходе ее дальнейшего движения.

Ответ на вопрос: Взаимодействие зарядов, описываемое законом Кулона без учета эффекта запаздывания (когда мы пренебрегаем конечностью скорости распространения электромагнитных возмущений) является потенциальным, так как в этом случае работу сил взаимодействия можно вычислять через изменение потенциальной энергии. Такой подход не будет корректным, если мы выйдем за рамки ***приближения электростатики***, то есть учтем наличие в природе единого электромагнитного взаимодействия: взаимосвязь электрических и магнитных полей, излучение ускоренными зарядами электромагнитных волн и конечность скорости их распространения. Таким образом, использование потенциальности сил взаимодействия между зарядами возможно, если мы считаем, что все заряды, создающие электромагнитные поля, покоятся в течении достаточно длительного время (все возмущения поля успели «убежать» за пределы изучаемой системы), а электромагнитными полями движущихся зарядов можно пренебречь.

Решение задачи: Поскольку кольцо опускают «очень медленно», можно считать, что на бусинку действует электрическая сила со стороны заряда практически покоящегося кольца (то есть мы можем воспользоваться квазистационарным приближением).

1) Пусть кольцо находится на высоте h над поверхностью. Сила притяжения, действующая со стороны зарядов кольца на бусинку, лежащую на поверхности, вычисляется из принципа суперпозиции, причем бусинка отрывается от поверхности, когда эта сила сравнивается с силой тяжести:

$$F_Q = \frac{q|Q|h}{4\pi\varepsilon_0(h^2+a^2)^{3/2}} = mg.$$

Удобно ввести переменную φ так, что $h = a\cdot\mathrm{tg}(\varphi)$. Тогда это уравнение приводится к виду

$$\frac{4\pi\varepsilon_0 mga^2}{q|Q|} = \sin(\varphi)\,[1-\sin^2(\varphi)].$$

Правая часть этого уравнения имеет максимум при $\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, и он равен $\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Поэтому при

$$\frac{4\pi\varepsilon_0 mga^2}{q|Q|} \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow |Q| \leq \sqrt{3}\,\frac{6\pi\varepsilon_0 mga^2}{q}$$

это условие не будет выполнено ни при каком h, и бусинка не придет в движение вплоть до касания кольца и поверхности.

2) Отрыв происходит при $h = a$, если

$$\frac{q|Q|}{8\pi\varepsilon_0 a^2} = mg\sqrt{2}.$$

Поле зарядов кольца (которое теперь не успеет сместиться за время полета бусинки, и мы его считаем постоянно находящимся на высоте a) считаем потенциальным, и потенциальная энергия бусинки как функция ее координаты x, отсчитываемой вверх от плоскости кольца (с учетом поля тяжести)

$$U(x) = mg(a+x) - \frac{q|Q|}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+x^2}} = mg\left[a + x - 2\sqrt{2}\,\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\right].$$

В точке максимального подъема (при $x = H - a$) эта энергия равна своему значению в точке «старта» – при $x = -a$, то есть

$$-2a = H - 2\sqrt{2}\,\frac{a^2}{\sqrt{a^2+(H-a)^2}} \Rightarrow \left(\frac{H}{2a}+1\right)\sqrt{1-\frac{H}{a}+\frac{H^2}{2a^2}} = 1.$$

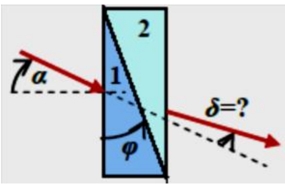
После возведения в квадрат для переменной $z \equiv \frac{H}{2a}$ получаем квадратное уравнение $z^2 + z - \frac{1}{2} = 0$, положительный корень которого $z = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Таким образом, максимальная высота подъема бусинки $H = (\sqrt{3}-1)a \approx 17{,}57$ см.

Критерии для задачи:

I	Сформулировано (используется в решении) условие отрыва бусинки	**1**
	Показано, что существуют значения заряда кольца, при которых отрыв не происходит	**2**
	При изучении движения бусинки после отрыва используется квазистационарное приближение	**2**
	Построено правильное выражение для потенциальной энергии бусинки	**3**
	Для нахождения максимальной высоты подъема используется условие равенства потенциальной энергии в этой точке ее начальному значению	**2**
II	Получено правильное ограничение на $\lvert Q\rvert$ (ответ на первый вопрос)	**3**
	Определено, при каком $\lvert Q\rvert$ отрыв происходит при $h = a$	**1**
	Записано правильное уравнение для H	**2**
	Получено решение этого уравнения (в виде $H = (\sqrt{3}-1)a$ или эквивалентном)	**3**
	Получен правильный численный ответ для H	**1**
	ВСЕГО	**20**

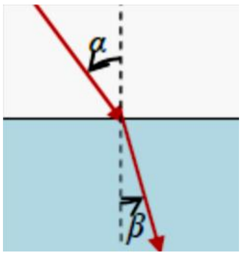
Задание 4:

Вопрос: Сформулируйте закон преломления света в геометрической оптике.



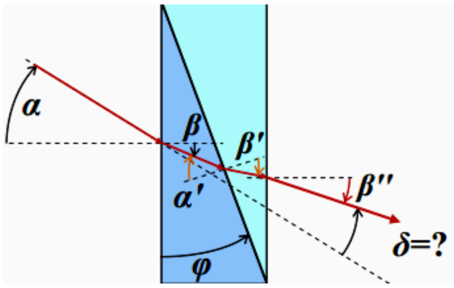
Задача: Узкий пучок света падает под углом $\alpha = 4°$ на поверхность плоскопараллельной пластины, склеенной из двух плотно прижатых клиньев с углом при вершине $\varphi = 3°$. Разность показателей преломления материалов клиньев $\Delta n \equiv n_2 - n_1 = 0{,}5$. Под каким углом к первоначальному направлению выйдет пучок из пластины? При расчетах учесть, что для малых углов $tg(\alpha) \approx \sin(\alpha) \approx \alpha$.

Ответ на вопрос: Закон преломления света можно сформулировать следующим образом: «При падении светового луча на границу раздела прозрачных сред различной оптической плотности он испытывает преломление. Луч падающий, луч преломленный и нормаль к границе раздела сред в точке падения лежат в одной плоскости. Отношение синусов углов падения (α) и преломления (β) равно постоянной для данных сред величине, называемой относительным показателем преломления этих сред: $\dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n$ (закон Снеллиуса).



Относительный показатель преломления равен отношению скоростей распространения света в первой и второй средах.» Это закон геометрической оптики, и он справедлив при пренебрежении волновыми свойствами света, то есть когда характерные размеры оптических неоднородностей и ширины световых пучков намного больше длины световой волны.

Решение задачи: Луч из данного пучка испытывает три преломления на границах раздела сред. При этом все углы падения и преломления заведомо меньше 7°, и в соответствии с указанием из условия, будем считать все эти углы малыми, и считать, что их синусы примерно равны самим углам в радианной мере. При первом преломлении угол падения равен α, и угол преломления



$\beta \approx \dfrac{\alpha}{n_1}$ (поскольку $\sin(\beta) = \dfrac{\sin(\alpha)}{n_1}$). Поэтому при втором преломлении – на границе раздела клиньев – угол падения будет равен $\alpha' = \beta + \varphi \approx \dfrac{\alpha}{n_1} + \varphi$. Снова используем малость углов, и находим угол преломления $\beta' \approx \dfrac{n_1}{n_2}\alpha' \approx \dfrac{\alpha}{n_2} + \dfrac{n_1}{n_2}\varphi$.

Угол падения при заключительном преломлении – на выходе из пластины – равен $\alpha'' = \dfrac{\pi}{2} - \left[\pi - \beta' - \left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)\right] = \beta' - \varphi$, то есть $\alpha'' \approx \dfrac{\alpha}{n_2} - \dfrac{\Delta n}{n_2}\varphi$. Таким образом, угол преломления на выходе $\beta'' \approx n_2\alpha'' \approx \alpha - \Delta n\varphi$, и искомый угол поворота луча равен $\delta = \alpha - \beta'' \approx \Delta n\varphi \approx 1{,}5°$. Обращает внимание, что этот угол не зависит от исходного угла падения – главное, чтобы он был достаточно малым в рамках требуемой точности. Еще отметим, что положительное значение δ отвечает повороту падающего луча «против часовой стрелки» (что обычно и считается положительным направлением поворота в математике). Так что полученная формула описывает не только величину, но и направление поворота падающего луча.

Критерии для задачи:

I	Корректно используется приближение малости углов	**4**
	Правильно записаны законы преломления на всех трех границах раздела	**3×1=3**
	Правильно описано направление преломления на всех трех границах раздела	**3×1=3**
II	Получено (используется в решении) правильное выражение для β	**2**
	Получено (используется в решении) правильное выражение для β'	**2**
	Получено правильное выражение для β''	**2**
	Получено правильный аналитический ответ для δ	**2**
	Получен правильный численный ответ для δ	**2**
	ВСЕГО	**20**