ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.

2023/24 учебный год, ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА. 10 классы.

Часть I (с варьируемыми данными, проверялись ответы): пример варианта.

Вопрос 1 (7 баллов):

Непроводящее кольцо радиусом R = 25,3 см разделено на 2024 одинаковых сектора. В каждой из 1012 пар первый сектор заряжен равномерно до заряда Q = +30 нКл, а второй – до заряда Q = –10 нКл (то есть сектора с одинаковым зарядом оказались напротив друг друга). С какой минимальной скоростью нужно запустить из центра кольца перпендикулярно его плоскости сферическую наночастицу с отрицательным удельным зарядом $\frac{-q}{m} = 0{,}04$ Кл/кг, чтобы она могла удалиться от кольца на расстояние, на несколько порядков превышающее его радиус? Сопротивлением среды движению частицы и взаимодействием с частицей других тел можно пренебречь. Ответ запишите в м/с, с точностью до целого значения.

Ответ: 240.

Комментарий: Направим ось x из центра кольца перпендикулярно его плоскости в направлении запуска частицы. Из симметрии распределения зарядов по кольцу ясно, ясно частица будет двигаться только по этой оси. Зависимость потенциальной энергии частицы от этой координаты

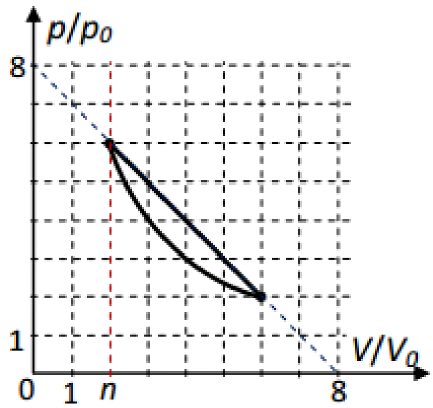
$$U(x) = q \cdot \varphi(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1012\Delta Q}{r} = 253\frac{q \cdot \Delta Q}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Здесь $\Delta Q \equiv +20$ нКл – заряд одной пары соседних секторов, $\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная. В этом выражении учтено, что все заряды кольца находятся на одном и том же расстоянии $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ от точки на оси кольца с координатой x. На очень большом расстоянии (при $x \gg R$) потенциальную энергию можно считать практически равной нулю, поэтому искомая скорость соответствует

$$\frac{mv_{min}^2}{2} + 253\frac{q \cdot \Delta Q}{\pi\varepsilon_0 R} = 0 \Rightarrow v_{min} = \sqrt{\frac{506}{\pi\varepsilon_0 R}\frac{(-q) \cdot \Delta Q}{m}} \approx 240 \text{ м/с}.$$

Вопрос 2 (9 баллов):

На рисунке показана pV-диаграмма циклического процесса с постоянным количеством одноатомного идеального газа в относительных единицах давления и объема. Цикл состоит из процесса, описываемого участком прямой $p(V) = p_0\left(8 - \frac{V}{V_0}\right)$ и изотермы. Минимальный объем газа в цикле равен $n \cdot V_0$. Известно, что температура изотермы $T = 360$ К, а n=3,2. Найдите максимальную температуру газа в этом процессе. Ответ запишите в К, без указания единиц измерения.



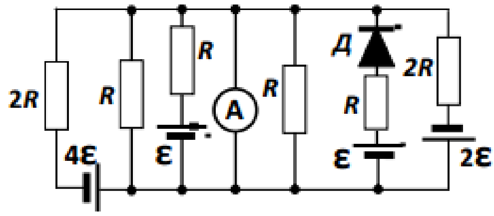
Ответ: 375.

Комментарий: Температура идеального газа $T = \frac{pV}{\nu R}$, и в данном процессе при заданном значении объема она равна $T(V) = \frac{p_0 V_0}{\nu R}\frac{V}{V_0}\left(8 - \frac{V}{V_0}\right)$. Поэтому температура изотермы равна $T = \frac{p_0 V_0}{\nu R} n(8 - n)$, а максимальная температура в этом процессе

$$T_{max} = 16\frac{p_0V_0}{\nu R} = \frac{16T}{n(8-n)} = 375\text{ К}.$$

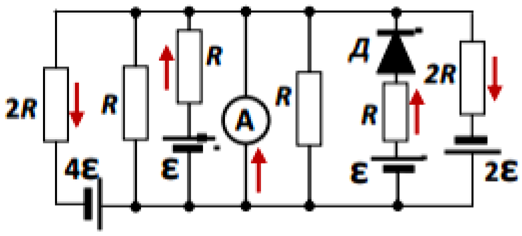
Вопрос 3 (9 баллов):

В схеме, показанной на рисунке, $\mathcal{E} = 1{,}32$ В, а $R = 3$ Ом. Все источники и амперметр идеальные, а ВАХ (вольт-амперная характеристика диода) описывается выражением $I(U) = \frac{4}{9}\frac{U^2}{R\mathcal{E}}$. Найдите силу тока через амперметр. Ответ запишите в Амперах с точностью до сотых.



Ответ: 0,77.

Комментарий: Поскольку амперметр идеальный (его внутреннее сопротивление равно нулю), то напряжение на нем равно нулю. Соответственно равны нулю напряжения на всех ветвях схемы, подключенных параллельно амперметру. Поэтому для каждой ветви мы можем определить силу тока. Пусть выбор положительных направлений токов показан на рисунке (ясно, что через резисторы, подключенные параллельно амперметру, ток не течет), а ветви с ненулевой силой тока будем нумеровать слева направо (то есть искомый $I_A \equiv I_3$). Тогда



$$4\mathcal{E} - 2RI_1 = 0 \Rightarrow I_1 = 2\frac{\mathcal{E}}{R},$$

$$\mathcal{E} - RI_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

$$2\mathcal{E} - 2RI_5 = 0 \Rightarrow I_5 = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

$$\mathcal{E} - RI_4 - U_D(I_4) = 0 \Rightarrow I_4 = \frac{1}{4}\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Следовательно, $I_3 = I_1 - I_2 + I_5 - I_4 = \frac{7}{4}\frac{\mathcal{E}}{R} = 0{,}77$ А.

Отметим, что из-за технического сбоя часть участников 10 класса при загрузке I части задания получили рисунок без указания полярности двух «средних» источников. Для таких участников жюри приняло решение засчитывать в качестве правильного все возможные 4 ответа (для всех 4 вариантов возможного «прочтения» схемы. Например, в данном варианте засчитывались, помимо «основного», ответы $I_3 = I_1 - I_2 + I_5 = 2\frac{\mathcal{E}}{R} = 0{,}88$ А, $I_3 = I_1 + I_2 + I_5 = 4\frac{\mathcal{E}}{R} = 1{,}76$ А *и* $I_3 = I_1 + I_2 + I_5 - I_4 = \frac{15}{4}\frac{\mathcal{E}}{R} = 1{,}65$ А*).*

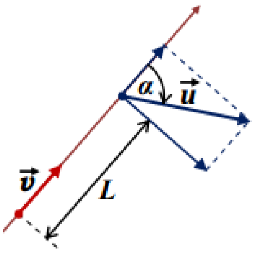
Часть II (проверялись решения): возможные решения и критерии проверки.

1. («Полеты друг за другом», 24 балла): На соревнованиях программируемых квадрокоптеров аппараты-участники выполняют заданный алгоритм движения. На одном из туров один из квадрокоптеров «гонялся» за другим. Согласно этому алгоритму, «преследователь» гонялся за «преследуемым», двигаясь всегда в горизонтальной плоскости с постоянной по величине скоростью $\upsilon = 10$ м/с строго по направлению к «преследуемому». При этом «преследуемый» двигался в той же плоскости с постоянной по величине скоростью $u = 20$ м/с всегда по направлению, составляющим постоянный угол $\alpha = 60°$ с направлением от «преследователя». В некоторый момент времени расстояние между квадрокоптерами равнялось $L = 34{,}64$ м.

- Найдите угловую скорость вращения отрезка прямой, соединяющей квадрокоптеры, в этот момент времени.

- Найдите величину ускорения обоих квадрокоптеров спустя время $t = 10$ с после этого момента времени.
- Сможет ли «преследователь» догнать «преследуемого» за достаточно большое время? Ответ объяснить.
- Опишите максимально полно траектории, по которым двигаются квадрокоптеры.

Возможное решение: Рассмотрим произвольный момент времени и определим



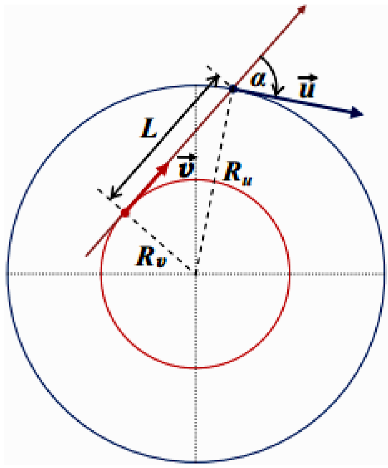
относительную скорость квадрокоптеров. Как нетрудно заметить, эта скорость оказывается перпендикулярна прямой, соединяющей квадрокоптеры, в этот момент времени (из-за того, что проекция скорости «преследуемого» на эту прямую в точности равна скорости «преследователя», направленной вдоль этой прямой: $v = u \cdot \cos(\alpha)$). Поэтому угол поворота этой прямой за малое время Δt

$$\Delta\varphi \equiv \omega \cdot \Delta t = \frac{u \cdot \sin(\alpha) \cdot \Delta t}{L} \Rightarrow \omega = \frac{u \cdot \sin(\alpha)}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{u}{L} \approx 0{,}5000\ \text{с}^{-1}.$$

Кроме того, изменение расстояния между квадрокоптерами за тот же промежуток времени

$$\Delta L = [u \cdot \cos(\alpha) - v] \cdot \Delta t = 0,$$

то есть в действительности это расстояние остается неизменным! Так как величины скоростей и угол между ними остаются неизменными, то оба тела вращаются вместе с этой линией с постоянной угловой скоростью. Радиусы кривизны их траекторий тоже остаются постоянными: $R_v = \frac{v}{\omega} = \frac{v}{u}\frac{L}{\sin(\alpha)} \approx 20{,}00$ м и $R_u = \frac{u}{\omega} = \frac{L}{\sin(\alpha)} \approx 40{,}00$ м. Теперь мы понимаем, что оба квадрокоптера движутся по окружностям и можем ответить на все заданные нам вопросы:



Так как величины скоростей не изменяются, ускорения являются центростремительными: $a_v = \omega \cdot v = \frac{vu \cdot \sin(\alpha)}{L} = 5$ м/с^2 и $a_u = \omega \cdot u = \frac{u^2 \cdot \sin(\alpha)}{L} = 10$ м/с^2. Модули этих ускорений неизменны, так что эти значения можно использовать в любой момент времени движения. Ясно также, что постоянство расстояния между преследуемым и преследователем исключает возможность успешного завершения погони, пока движение не изменится.

Траектории движения квадрокоптеров – это две концентрические окружности радиусами примерно 20 м (у преследователя) и 40 м (у преследуемого), причем в любой момент времени вектор скорости преследователя направлен на преследуемого (см. рисунок).

Ответы: угловая скорость вращения отрезка прямой, соединяющей квадрокоптеры, в любой момент времени равна $\omega = \frac{u \cdot \sin(\alpha)}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{u}{L} \approx 0{,}500\ \text{с}^{-1}$; в любой момент времени величина ускорения преследователя равна $a_v = \frac{vu \cdot \sin(\alpha)}{L} = 5$ м/с^2, а преследуемого $a_u = \frac{u^2 \cdot \sin(\alpha)}{L} = 10$ м/с^2; при таком движении преследователь никогда не догонит преследуемого; траектории движения квадрокоптеров – это две концентрические окружности радиусами $R_v = \frac{v}{u}\frac{L}{\sin(\alpha)} \approx 20{,}00$ м (у преследователя) и $R_u = \frac{L}{\sin(\alpha)} \approx 40{,}00$ м (у преследуемого).

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	действие	макс. балл

1	Правильно найдена угловая скорость $\omega = \frac{u \cdot \sin(\alpha)}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{u}{L} \approx 0{,}500$ с$^{-1}$		**4**
	1.1	формула	3
	1.2	численное значение	1
2	Правильно найдены ускорения обоих квадрокоптеров		**12**
	2.1	определены радиусы кривизны траекторий обоих квадрокоптеров	3+3=6
	2.2	указано, что ускорения сводятся к центростремительным (отсутствуют касательные составляющие ускорений)	2
	2.3	определена величина ускорения преследователя (формула+число)	1+1=2
	2.4	определена величина ускорения преследуемого (формула+число)	1+1=2
3	Обоснованно утверждается, что погоня не может быть успешной.		**3**
	3.1	доказано, что расстояние между квадрокоптерами не изменяется	2
	3.2	сформулировано утверждение о безуспешности погони.	1
4	Правильно описаны траектории обоих квадрокоптеров		**5**
	4.1	указано, что обе траектории – концентрические окружности	3
	4.2	правильно описано (в том числе указано на рисунке) относительное положение квдрокоптеров и центра окружностей	1
	4.3	приведен правильный иллюстрирующий рисунок	1
	ВСЕГО		**24**

2. («Диффузия водорода», 17 баллов) Жесткий вертикальный цилиндрический сосуд с гладкими стенками разделен на две части горизонтальным поршнем. В некоторый момент времени поршень покоился, и при этом под ним находилось 3 моля азота, а над ним – 1 моль водорода, а расстояния от поршня до «дна» и до «потолка» сосуда были одинаковы и равны h = 36 см. Однако в дальнейшем поршень плавно перемещается из-за того, что молекулы водорода способны медленно диффундировать сквозь него (диффузия молекул азота пренебрежимо мала). Куда и на какое расстояние сместится поршень за очень большое время? Температура содержимого сосуда все это время поддерживается постоянной.

Возможное решение: В начальный момент вес поршня уравновешивался разностью давлений азота и водорода: $Mg = pS = \frac{2RT}{h}$. Из-за диффузии водорода поршень начнет смещаться вверх, где количество газа уменьшается. Пусть x – расстояние, на которое он сместится, а y – количество молей водорода, перешедших в нижнюю половину. Тогда, с одной стороны, концентрации водорода должны выровняться: $\frac{y}{1-y} = \frac{h+x}{h-x} \Rightarrow \frac{x}{h} = 2y - 1$, а с другой (в соответствии с условием равновесия поршня)

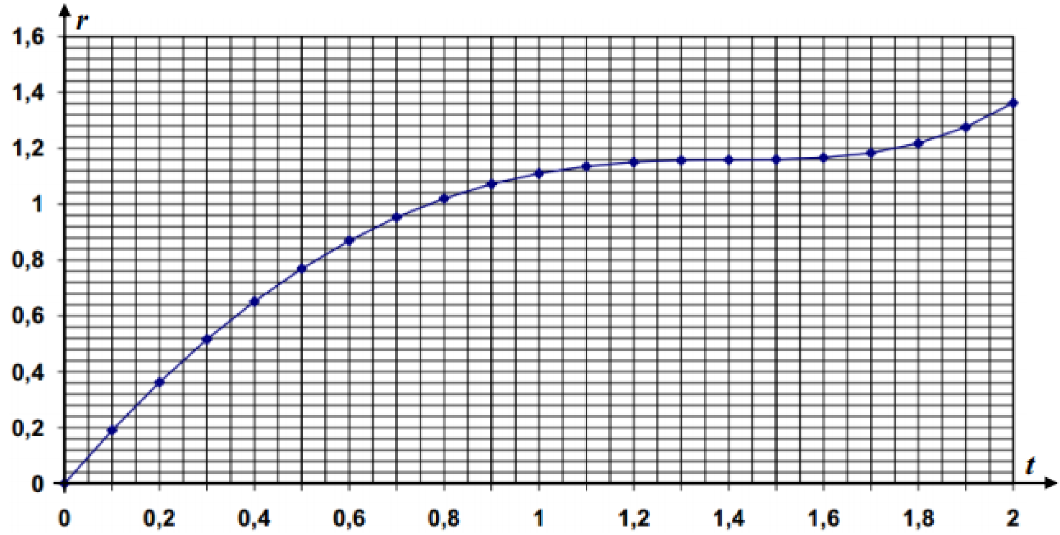
$$Mg = \frac{(3+y)RT}{h+x} - \frac{(1-y)RT}{h-x} \Rightarrow 2 = \frac{3+y}{2y} - \frac{1-y}{2(1-y)} = \frac{3}{2y} \Rightarrow y = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}h = 18 \text{ см.}$$

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	**действие**		**макс. балл**
1	Правильное понимание условий равновесия в системе		**3**
	1.1	записано условие механического равновесия поршня	1
	1.2	указано (используется в решении), что для наступления равновесия необходимо, чтобы концентрации обоих газов в разных частях сосуда стали равны	2
2	Проведен анализ связи между распределением газов и положением поршня		**9**
	2.1	сила давления выражается через высоту положения поршня из уравнения Менделеева-Клапейрона (газовых законов): используется уравнение $pS = \frac{2RT}{h}$ или эквивалентное.	4

	2.2	записано уравнение, выражающее требование равенства концентраций	3
	2.3	на основе уравнений равновесия правильно записана полная система уравнений для нахождения x	2
3	Правильно определено смещение поршня.		**5**
	3.1	выведено уравнение с единственной неизвестной, линейно связанной с x	2
	3.2	получен правильный ответ $x = \frac{1}{2}h = 18$ см	1+2=3
	ВСЕГО		**17**

3. («График полета», 17 баллов) Из очень большой по размерам камеры с горизонтальным полом, расположенной на поверхности Земли, откачали почти весь воздух. В этой камере был произведен выстрел шариком из пневматического пистолета. С помощью лазерного дальномера был снят график величины перемещения шарика от стартовой точки в зависимости от прошедшего времени. Этот график приведен на рисунке. К сожалению, информация об использованных на нем масштабных единицах времени и длины оказалась утраченной.



- Определите по графику, под каким углом к горизонту был произведен выстрел.

Впоследствии появилась новая информация о том, что по оси абсцисс отложено время в секундах, а ускорение свободного падения в камере равняется g ≈ 9,81 м/с^2. С учетом этой информации:

- Определите величину начальной скорости шарика. Постарайтесь обеспечить наиболее высокую (для имеющихся данных) точность результата
- Найдите величину перемещения этого шарика к тому моменту, когда его скорость окажется перпендикулярна вектору перемещения.
- Оцените точность полученных Вами результатов (то есть определите величину возможной ошибки).

Возможное решение: Закон движения шарика удобно записать в системе координат с горизонтальной осью x и вертикальной осью y, совместив начало координат с точкой броска:

$$\left\{\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos(\alpha)\, t \\ y(t) &= v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r(t) = v_0 t \sqrt{1 - \frac{g sin(\alpha)}{v_0} t + \frac{g^2 t^2}{4 v_0^2}}.$$

Скорость изменения величины перемещения $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ на нашем графике можно связать с тангенсом угла наклона касательной к этому графику, и при этом можно обратить внимание, что на графике нельзя обнаружить участки, на которых она отрицательна. Только в интервале t = 1,40 ÷ 1,43 усл.ед. есть участок, на котором эта скорость очень близка к нулю, а в другие моменты времени она явно положительна. Примем, что t_0 = 1,415 ± 0,015 усл.ед. Запишем

$$\Delta(r^2) = 2r \cdot \Delta r = v_0^2\left(2 - 3\frac{g\sin(\alpha)}{v_0}t + \frac{g^2t^2}{v_0^2}\right)t \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v_0^2 t}{2r}\left(2 - 3\frac{g\sin(\alpha)}{v_0}t + \frac{g^2t^2}{v_0^2}\right) \equiv \frac{v_0^3}{2gr}z(2 - 3 \cdot \sin(\alpha)z + z^2).$$

Здесь введена безразмерная переменная $z \equiv gt/v_0$, пропорциональная t. Как видно, существование моментов времени, когда $\frac{\Delta r}{\Delta t} = 0$, связано с существованием решений уравнения $z^2 - 3 \cdot \sin(\alpha)z + 2 = 0$, дискриминант которого $D = 9 \cdot \sin^2(\alpha) - 8$ зависит только от величины угла α. Наш график с хорошей точностью отвечает ситуации, когда у этого уравнения только один корень, то есть $\sin(\alpha) \approx \frac{2\sqrt{2}}{3}$, то есть $\alpha \approx \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \approx 70{,}5°$. Проверим точность этого результата. Для этого заметим, что для этого угла $\frac{\Delta r}{\Delta t} = 0$ соответствует $z_0 = \frac{3}{2}\sin(\alpha) = \sqrt{2}$. Таким образом,

$$\frac{v_0}{g} = \frac{t_0}{\sqrt{2}} \approx 1{,}00 \pm 0{,}01 \text{ усл. ед.}$$

По графику можно определить и модуль перемещения к моменту t_0. При внимательном отношении ее можно оценить как $(r_0)_{\text{гр}} \approx 1{,}155 \pm 0{,}005$. Поскольку

$$r_0 = \frac{v_0^2}{g}z_0\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}z_0 + \frac{z_0^2}{4}} = v_0\frac{v_0}{g} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}},$$

то можно определить (естественно, пока в усл. ед.) и начальную скорость:

$$v_0 = \sqrt{3}r_0\left(\frac{v_0}{g}\right)^{-1} \approx 2{,}00 \pm 0{,}03 \text{ усл. ед.}$$

В этом вычислении малые относительные ошибки величин v_0/g (1 %) и r_0 (0,5 %) при вычислении их отношения складываются.

С другой стороны, эту же величину можно тоже найти из графика, построив касательную к графику в точке $t = 0$. Тогда получаем оценку $v_0 \approx 2{,}00 \pm 0{,}05$ усл. ед. (это самая неточная из извлекаемых из графика величин, так как провести касательную к графику на краю интервала однозначно довольно затруднительно). Как видно, совпадение очень хорошее, так что ошибка в определении угла не превышает 1,5%. Итак, вполне разумная оценка точности $\alpha \approx (70{,}5 \pm 1{,}0)°$.

С учетом дополнительной информации о том, что для времени 1 усл.ед. = 1 с и значения g, заданное с очень высокой точностью (если считать, что ошибка не превышает половины единицы последнего разряда приведенной величины, то это соответствует относительной ошибке порядка 0,05 %), находим: $t_0 = (1{,}415 \pm 0{,}015)$ с и

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}gt_0 \approx (9{,}8 \pm 0{,}1) \text{ м/с}$$

(здесь мы ориентировались на наибольшую относительную ошибку). Искомая величина перемещения

$$r_0 = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \approx (5{,}66 \pm 0{,}12)\text{м}.$$

Здесь «для надежности» мы посчитали, что относительная ошибка в определении квадрата скорости равна удвоенной относительной ошибке в определении самой скорости. В реальности, имея в распоряжении график и анализируя значения перемещения не в одной точке, а для всего заданного интервала значений времени, можно добиться заметно лучшей точности в определении этой величины: полный анализ позволяет установить, что приведенный график соответствует $\alpha \approx (70{,}5 \pm 0{,}3)°$, $v_0 \approx (9{,}81 \pm 0{,}05)$ м/с и тогда $r_0 \approx (5{,}66 \pm 0{,}06)$м. Но для полного зачета результата участникам достаточно и более «грубого» результата (см. критерии проверки). Отметим также, что усл.ед. расстояния на нашем графике примерно соответствует $\frac{v_0^2}{2g}$ ≈4,905 м.

Ответы: $\alpha \approx (70{,}5 \pm 0{,}3)°$, $v_0 \approx (9{,}81 \pm 0{,}05)$ м/с, $r_0 \approx (5{,}66 \pm 0{,}06)$м.

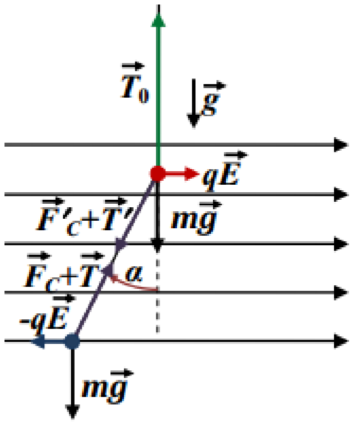
КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№		действие	макс. балл
1		Анализ зависимости и определение величины α	**6**
	1.1	записан правильный закон изменения $r(t)$, описывающий график	**1**
	1.2	указана (используется в решении) связь радиальной скорости с углом наклона касательной к графику	**1**
	1.3	сделан вывод (на основе анализа графика и/или на основе формы вопроса 3) о существовании единственного момента времени, когда радиальная скорость равна нулю	**1**
	1.4	записано уравнение, эквивалентное $z^2 - 3 \cdot \sin(\alpha)z + 2 = 0$	**1**
	1.5	определена величина $\alpha \approx \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \approx 70{,}5°$	**2**
2		Определение начальной скорости	**5**
	2.1	по графику определена величина t_0 в усл.ед. с попаданием в интервал t_0 = 1,415 ± 0,035	**1**
	2.2	по графику определена величина r_0 в усл.ед. с попаданием в интервал $r_0 = 1{,}155 \pm 0{,}015$	**1**
	2.3	определена величина v_0 в усл.ед.	**1**
	2.4	найдено численное значение для начальной скорости с попаданием в интервал $v_0 \approx (9{,}81 \pm 0{,}05)$ м/с; при попадании только в интервал $v_0 \approx (9{,}81 \pm 0{,}19)$ м/с ставится **1 балл**	**2**
3		Нахождение величины перемещения к моменту t_0	**3**
	3.1	получена (используется в решении) связь $r_0 = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$ или эквивалентная	**1**
	3.2	найдено численное значение для начальной скорости с попаданием в интервал $r_0 \approx (5{,}66 \pm 0{,}06)$м; при попадании только в интервал $r_0 \approx (5{,}66 \pm 0{,}24)$м ставится **1 балл**	**2**
4		Анализ ошибок определения искомых величин	**3**
	4.1	указана ошибка определения α в интервале 0,1° – 1,0°	**1**
	4.2	указана ошибка определения v_0 в интервале (0,02 – 0,20) м/с	**1**
	4.3	указана ошибка определения r_0 в интервале (0,02 – 0,20) м	**1**
		ВСЕГО	**17**

4. («Равновесия», 17 баллов) Легкая нерастяжимая непроводящая нить длиной L = 291 мм закреплена одним концом на потолке. К ее второму концу прикреплен медный шарик, к нему – еще одна такая же нить, а к ней, в свою очередь, второй такой же шарик. Сначала шарики не были заряжены, и обе нити были вертикальны. Сила натяжения верхней нити при этом равнялась T_0 = 1,2 Н. Затем, удерживая шарики на месте, на верхний шарик нанесли заряд $+q$ = + 2,5 мкКл, а на нижний – заряд $-q$ = – 2,5 мкКл. В области, где находилась эта система, создали однородное горизонтальное электрическое поле с напряженностью E = 70 кВ/м, и после этого шарики отпустили. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Плотность меди ρ =8,9 г/см^3, ускорение свободного падения $g \approx 9{,}81$ м/с^2.

- Под какими углами к вертикали будут расположены нити после установления равновесия?
- Какими станут эти углы, если напряженность электрического поля уменьшить в три раза и вновь дождаться равновесия?

Возможное решение: Вначале сила натяжения верхней нити уравновешивала силу тяжести, действующую на «тело» из двух шариков, соединенных нижней нитью. Следовательно, масса шариков удовлетворяла соотношению $T_0 = 2mg$. Значит, масса одного шарика равна $m = \frac{T_0}{2g} \approx 61{,}162$ г а радиус шариков $r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} \approx 11{,}8$ мм. Отметим, что это почти в 25 раз меньше длины нити, и поэтому в дальнейшем для вычисления силы притяжения шариков мы будем использовать закон Кулона в форме, применимом для точечных зарядов. Поскольку суммарный заряд, нанесенный на шарики перед включением электрического поля, равен нулю, то и суммарная сила, действующая на это «тело» со стороны электрического поля, равна нулю. Поэтому сила натяжения верхней нити не изменится по величине и направлению, причем этот вывод не зависит от величины напряженности поля. Так что верхняя нить во всех случаях останется вертикальной – искомый угол отклонения $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 = 0$. После заряжения шариков и включения поля возникают электрические силы: одинаковые по величине и противоположные по направлению силы со стороны внешнего электрического поля $\pm q\vec{E}$ и пара кулоновских сил притяжения шариков $\left|\vec{F}_C\right| = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, где введено обозначение R для расстояния между центрами шариков $R = L + 2r \approx 314{,}6$ мм. Силы натяжения нижней нити (если она натянута) сонаправлены с силами кулоновского притяжения, так что для каждого шарика их можно объединить в единую силу



$$\vec{F} \equiv \vec{F}_C + \vec{T}.$$

Обозначим угол отклонения нижней нити от вертикали $\alpha_2 \equiv \alpha$ (см. рисунок). Тогда, записывая условие равновесия любого из шариков, получаем уравнения для определения угла отклонения и величины F:

$$\begin{cases} F \cdot \sin(\alpha) = qE \\ F \cdot \cos(\alpha) = mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}(\alpha) = \dfrac{qE}{mg} \\ F = \sqrt{m^2g^2 + q^2E^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{7}{24}\right) \approx 16{,}3° \\ F = \dfrac{25}{24}mg = 0{,}625 \text{ Н} \end{cases}.$$

Однако этот ответ получен в <u>предположении</u>, что нижняя нить натянута, то есть что ее сила натяжения $T = F - F_C > 0$. Проверим это: $T = \frac{25}{48}T_0 - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \approx +0{,}057$ Н. Условие выполнено. Если напряженность электрического поля уменьшить в три раза, то новые значения $\tilde{\alpha} = \mathrm{arctg}\left(\frac{7}{72}\right) \approx 5{,}6°$ и $F = \frac{\sqrt{5233}}{72}mg \approx 0{,}603$ Н.Таким образом, и в этом случае нить натянута, а угол отклонения уменьшается почти в три раза. Следует обратить внимание, насколько существенен учет радиуса шариков. Если вычислить величину силы кулоновского притяжения без учета этого радиуса, то

$$\left|\vec{F}_C\right| = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2} \approx 0{,}664 \text{ Н}.$$

Значит, в этом случае условие, что нить натянута, оказалось бы нарушено уже при первом значении напряженности! Тогда все ответы оказались бы некорректными, ибо оказалось бы, что кулоновское притяжение заставит шарики «прилипнуть» друг к другу, в результате чего они бы разрядились и перестали бы «чувствовать» электрическое поле. Поэтому в положениях устойчивого равновесия обе нити были бы вертикальны. Отметим также, что поправка в закону Кулона, связанная с «неточечностью» шариков, намного меньше, чем учтенная нами поправка за счет изменения расстояния между центрами шариков.

Ответы: $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 = 0, \alpha_2 \approx 16{,}3°, \tilde{\alpha}_2 \approx 5{,}6°$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	**действие**		**макс. балл**
1	Правильно найден угол наклона верхней нити в первом положении равновесия		**4**
	1.1	записано условие равновесия системы из шариков и нижней нити	**2**
	1.2	доказано, что верхняя нить вертикальна	**2**
2	Правильно найден угол наклона нижней нити в первом положении равновесия		**8**
	2.1	записаны условия равновесия одного шарика с учетом сил натяжения нитей, силы тяжести, силы, действующей со стороны внешнего электрического поля и кулоновской силы	**4×0,5 = 2**
	2.2	правильно найден угол наклона*	**2**
	2.3	проведен анализ условия натянутости нижней нити**	**2**
	2.4	найден радиус шариков, который используется в вычислении кулоновской силы	**1**
	2.5	доказано, что нижняя нить натянута	**1**
3	Правильно найден угол наклона верхней нити во втором положении равновесия (указано на его неизменность)		**1**
4	Правильно найден угол наклона нижней нити во втором положении равновесия.		**4**
	4.1	записаны (в т.ч. если используется п. 2.1 с указанием различий) условия равновесия одного шарика с учетом сил натяжения нитей, силы тяжести, силы, действующей со стороны внешнего электрического поля и кулоновской силы	**4×0,25 = 1**
	4.2	правильно найден угол наклона*	**1**
	4.3	проведен анализ условия натянутости нижней нити**	**1**
	4.4	доказано, что нижняя нить натянута	**1**
	ВСЕГО***		**17**

*****Если для угла наклона получено верное значение при решении системы уравнений, но затем из-за ошибки в анализе выполнения условия натянутости нижней нити (обычно связанной с пренебрежением радиусом шариков при вычислении величины кулоновской силы) сделан неправильный вывод о том, что шарики разрядятся и нижняя нить будет вертикальна, то за эти пункты ставятся половинные баллы (пункт 2.2 – **1 балл**, пункт 4.2 – **0,5 балла**);

******Если анализ проведен правильно (получено условие $T = F - F_C > 0$), но в итоге из-за ошибки в вычислении F_C сделан неверный вывод, то баллы за пункты 2.3 и 4.3 ставятся полностью, а следующие пункты (2.5 и 4.4) полностью не засчитываются;

*******Если в результате оценки по критериям оценка за задачу получается дробной, она округляется вверх до ближайшего целого значения.