Решение варианта №1 (Математика - 10 класс)

1. В кружке «Неумелые руки» методом тяп-ляп изготовили несбалансированные рычажные весы с плечами разной длины и чашами с разным собственным весом. В результате четырех взвешиваний на этих весах были получены следующие «равновесия»:

[слева 3 кг = справа дыня]; [слева дыня = справа 5,5 кг];
[слева 5 кг = справа арбуз]; [слева арбуз = справа 10 кг].

Каков истинный вес (масса) дыни и арбуза? (12 баллов)

Решение. Соотношение масс [слева x = справа y] — линейное: $y = kx+b$, где $k > 0$ и b — константы. Если [слева x = справа y] и [слева y = справа z], то $z = Kx + B$, где $K = k^2$, $B = (k+1)b$. Имеем

$$\begin{cases} K\cdot 3 + B = 5{,}5 \\ K\cdot 5 + B = 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} K = 9/4 \\ B = -5/4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k = 3/2 \\ b = -1/2. \end{cases}$$

отсюда находим массы: дыня $= k\cdot 3 + b$, арбуз $= k \cdot 5 + b$.

Ответ: дыня = 4 кг, арбуз = 7 кг.

2. Какое максимальное возможное количество идущих подряд членов возрастающей геометрической прогрессии могут быть 3-значными натуральными числами? Приведите пример такой последовательности. (16 баллов)

Решение. Обозначим искомые члены прогрессии $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_k = a_0 q^k$, знаменатель — несократимая дробь $q = r/s$, $r > s$. Тогда $a_0 = bs^n$, $a_n = br^n$, $b \in \mathbb{N}$, т. к. r^n и s^n взаимно просты. Получаем ограничение

$$r^n < 1000. \qquad (1)$$

Ещё одно ограничение:

$$q^n = \frac{a_n}{a_0} < 10. \qquad (2)$$

1) Пусть $r = 2$, тогда $q = 2$, и (2) $\Longrightarrow n \le 3$.
   Рассматривать $q > 2$ незачем.
2) Пусть $r = 3$, тогда $q = 3/2$, (2) $\Longrightarrow n \le 5$. Для $n = 5$ имеем

$$r = 3, \quad s = 2, \qquad \begin{cases} a_0 = 32b \ge 100 \\ a_n = 243b < 1000 \end{cases} \Longrightarrow b = 4.$$

3) Пусть $r \ge 4$, тогда (1) $\Longrightarrow n \le 4$. Рекорд $n = 5$ побить не удастся.

Ответ: 6. Единственный пример: 128, 192, 288, 432, 648, 972.

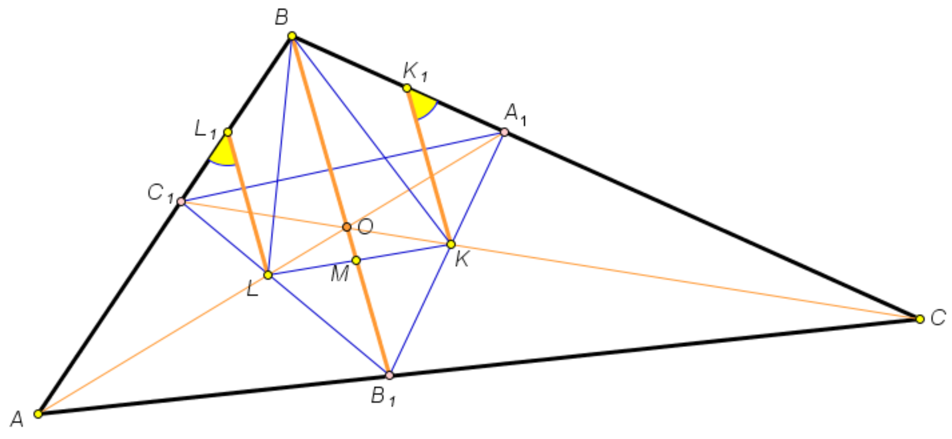
3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1, L – точка пересечения отрезков B_1C_1 и AA_1, K – точка пересечения отрезков B_1A_1 и CC_1. Найдите отношение $LM:MK$, если M – точка пересечения биссектрисы BB_1 с отрезком LK, и $AB:BC:AC = 2:3:4$. (16 баллов)

Решение.

$AB:BC:AC = 2:3:4,$

$a = BC = 3x, b = AC = 4x,$

$c = AB = 2x.$



Проведем прямые

$LL_1 \parallel BB_1, KK_1 \parallel BB_1,$

$L_1 \in C_1B, K_1 \in A_1B.$

$\angle C_1L_1L = \angle A_1K_1K = \angle B/2.$

По теореме Фалеса и по свойствам биссектрис имеем соотношения: $\frac{C_1L_1}{L_1B} = \frac{C_1L}{LB_1} = \frac{AC_1}{AB_1}, \frac{A_1K_1}{K_1B} = \frac{A_1K}{KB_1} = \frac{CA_1}{CB_1}$, или $\frac{C_1L_1}{L_1B} = \frac{AC_1}{AB_1}, \frac{K_1B}{A_1K_1} = \frac{CB_1}{CA_1}$,

$$\frac{C_1L_1}{L_1B} \cdot \frac{K_1B}{A_1K_1} = \frac{AC_1}{AB_1} \cdot \frac{CB_1}{CA_1}, \frac{K_1B}{L_1B} = \frac{AC_1}{AB_1} \cdot \frac{CB_1}{CA_1} \cdot \frac{A_1K_1}{C_1L_1} = \frac{\boldsymbol{AC_1}}{\boldsymbol{BC_1}} \cdot \frac{\boldsymbol{CB_1}}{\boldsymbol{AB_1}} \cdot \frac{\boldsymbol{BA_1}}{\boldsymbol{CA_1}} \cdot \frac{\boldsymbol{BC_1}}{\boldsymbol{BA_1}} \cdot \frac{\boldsymbol{A_1K_1}}{\boldsymbol{C_1L_1}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{BC_1}{BA_1} \cdot \frac{A_1K_1}{C_1L_1},$$

$$\frac{K_1B}{L_1B} = \frac{A_1K_1}{BA_1} \cdot \frac{BC_1}{C_1L_1} = \frac{KK_1}{BB_1}\frac{BB_1}{LL_1}, (\Delta A_1KK_1 \sim \Delta A_1B_1B,\ \ \Delta C_1LL_1 \sim \Delta C_1B_1B), \qquad \frac{K_1B}{L_1B} = \frac{KK_1}{LL_1}.$$

Поскольку $\angle BL_1L = \angle BK_1K$, $\frac{LL_1}{L_1B} = \frac{KK_1}{K_1B}$, то треугольники BL_1L и BK_1K подобны,

$\angle LBM = \angle L_1LB = \angle K_1KB = \angle KBM$. Следовательно, BM – биссектриса треугольника LBK, $LM:MK = BL:BK$.

По теореме Менелая для треугольника ABO, имеем

$$\frac{AL}{LO} \cdot \frac{OB_1}{BB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} = 1, \frac{AL}{LO} = \frac{b}{a} \cdot \frac{BO+OB_1}{OB_1} = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a+c}{b} + 1\right) = \frac{a+c+b}{a}.$$

$$\Delta ALL_1 \sim \Delta AOB, \qquad \frac{AL}{AO} = \frac{LL_1}{BO}, \frac{AL}{AL+LO} = \frac{LL_1}{BO}, \qquad LL_1 = \frac{a+b+c}{2a+b+c} \cdot BO.$$

Аналогично, $\frac{CK}{KO} = \frac{a+c+b}{c}$, $KK_1 = \frac{a+b+c}{a+b+2c} \cdot BO.$

$$\frac{LM}{MK} = \frac{LB}{KB} = \frac{LL_1}{KK_1} = \frac{a+b+2c}{2a+b+c} = \frac{3x+4x+4x}{6x+4x+2x} = \frac{11}{12}.$$

Ответ: $\frac{11}{12}$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$\left|a-3|x+0,5|+x+2,5\right|+\left|a-x^2\right|=x^2+x-3|x+0,5|+2,5$ имеет ровно два целых решения.

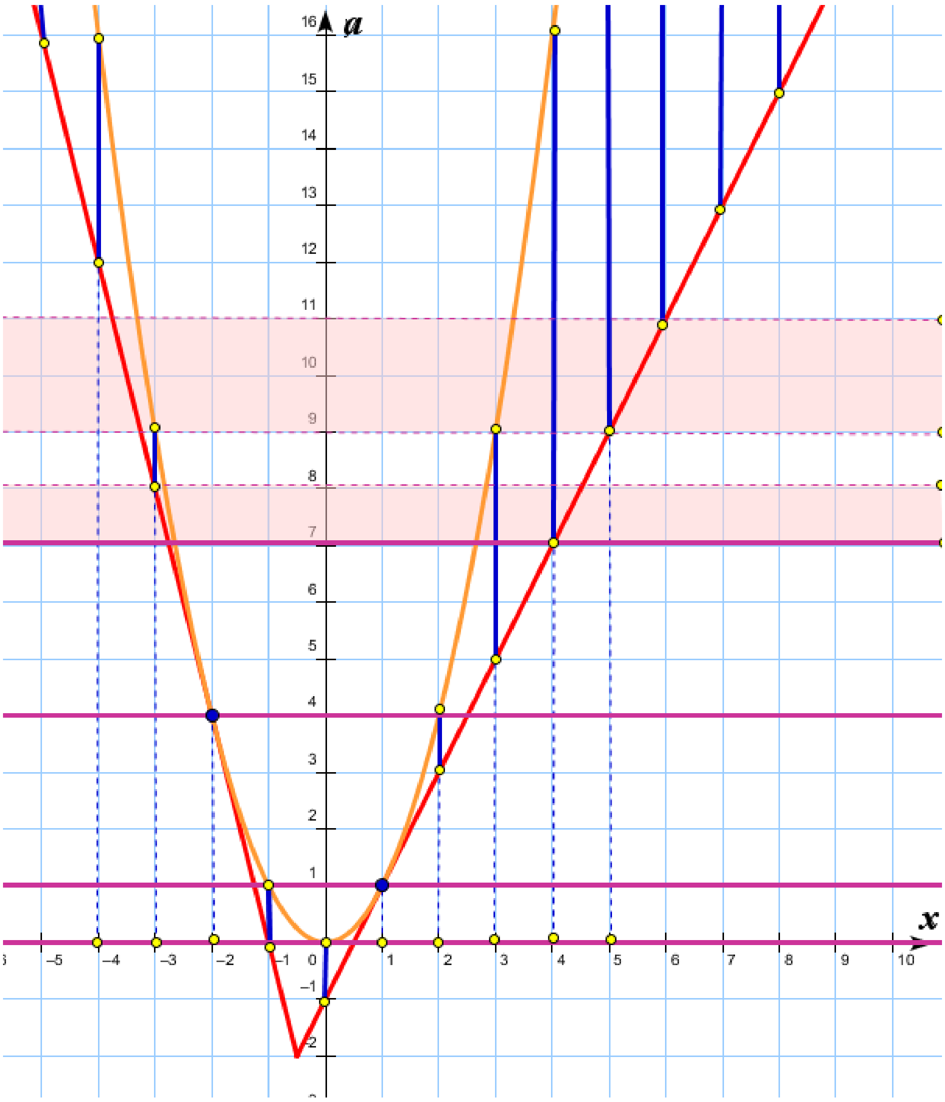
(16 баллов)

Решение:

Обозначим $u=a-3|x+0,5|+x+2,5$, $v=a-x^2$. Тогда исходное уравнение будет иметь вид $|u|+|v|=u-v$. Решениями последнего уравнения являются все u и v такие, что $u\ge 0$, $v\le 0$, или $a-3|x+0,5|+x+2,5\ge 0$ и $a-x^2\le 0$. Отсюда имеем $3|x+0,5|-x-2,5\le a\le x^2$.

В системе Oxa построим графики функций $a=3|x+0,5|-x-2,5$ и $a=x^2$.

Правый луч угла лежит на прямой $a=2x-1$, левый луч угла лежит на прямой $a=-4x-4$.



Найдем точки пересечения параболы с этими прямыми:

$x^2=2x-1$, $x=1$, $a=1$;

$x^2=-4x-4$, $x=-2$, $a=4$.

При $a=0$ имеем два решения $x=-1$, $x=0$. При $a=1$ имеем два решения $x=-1$, $x=1$.

При $a=4$ имеем два решения $x=-2$, $x=2$.

При $a\in[7;8)$ имеем два решения $x=3$, $x=4$.

При $a\in(9;11)$ имеем два решения $x=4$, $x=5$.

При остальных $a<12$ ровно двух решений не будет. Если $\frac{a+1}{2}-\sqrt{a}\ge 3$, то уравнение будет иметь не менее трех целых положительных решений.

Решим это неравенство:

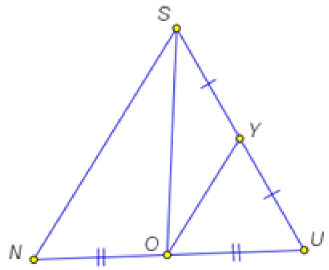
$a-2\sqrt{a}-5\ge 0$, $\sqrt{a}\ge 1+\sqrt{6}$.

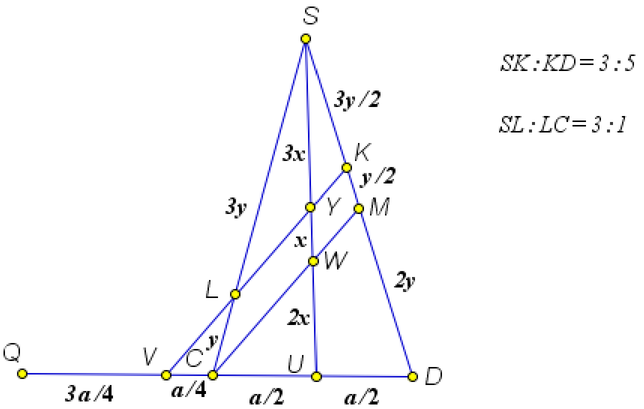
Если $a\ge 12$, то рассматриваемое неравенство выполняется.

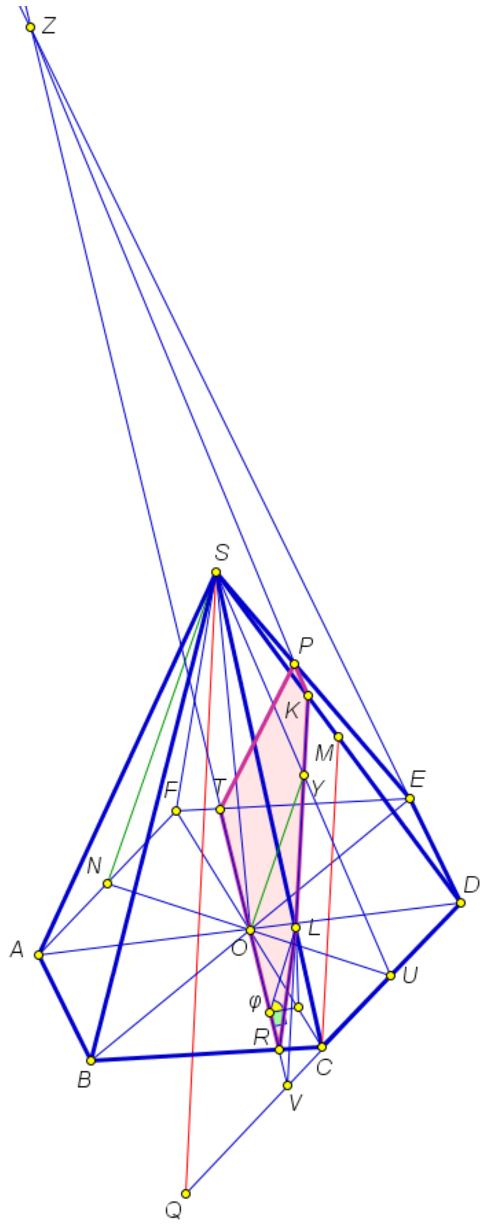
Ответ: $a\in\{0;1;4\}\cup[7;8)\cup(9;11)$.

5. Сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ образовано плоскостью, проходящей через центр основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF, сторона основания пирамиды равна 8, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно $3\sqrt{13/7}$. Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания. (20 баллов)

Решение. В плоскости SNU (SU – апофема грани SCD) через точку O проведем прямую OY, параллельную SN, $Y \in SU$, OY – средняя линия треугольника SNU.







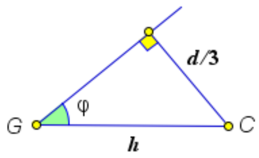
В плоскости SCD через точку Y проведем прямую KL, параллельную CM, $K \in SD$, $L \in SC$.

Медианы SU и CM треугольника SCD в точке пересечения W делятся в отношении 2:1, т.е. $SW : WU = 2:1$. Имеем $SY : YW : WU = 3:1:2$. Согласно теореме Фалеса, приходим к соотношениям $SL : LC = 3:1$, $SK : KD = 3:5$.

Точка V – точка пересечения прямой KL и CD, $KM : MD = VC : CD = 1:4$.

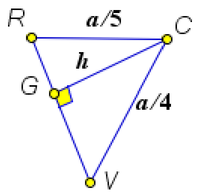
В плоскости основания проведем прямую VO, точки R и T – точки пересечения со сторонами BC и FE соответственно. Треугольники RCV и ODV подобны, и $SL : LC = 3:1$, $SK : KD = 3:5$. Обозначим сторону основания a, тогда $RC = FT = a/5$, $BR = TE = 4a/5$.

Пусть φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Обозначим расстояние от точки S до плоскости сечения d, $d = 3\sqrt{13/7}$. Расстояние от точки C до сечения равно $d/3$. В треугольнике RCV проведем высоту CG, обозначим ее длину h. Тогда



$\sin\varphi = \dfrac{d}{3h}$, $\cos\varphi = \sqrt{1-\dfrac{d^2}{9h^2}}$. Найдем RV по теореме косинусов:

$RV^2 = \dfrac{a^2}{25}+\dfrac{a^2}{16}-\dfrac{a^2}{20}=\dfrac{21a^2}{400}$, $RV = \dfrac{a\sqrt{21}}{20}=\dfrac{2\sqrt{21}}{5}$. Используя различные формулы для нахождения площади треугольника RCV, имеем



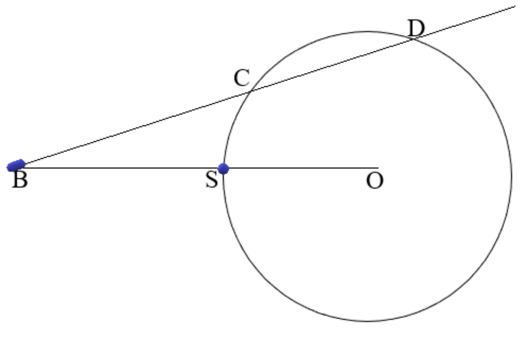
$\dfrac{a\sqrt{21}}{20}h = \dfrac{a^2}{20}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $h = \dfrac{a}{2\sqrt{7}} = \dfrac{4}{\sqrt{7}}$. Тогда

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{d^2}{9h^2}} = \sqrt{1-\frac{28d^2}{9a^2}} = \frac{\sqrt{9a^2-28d^2}}{3a} = \sqrt{1-\frac{28\cdot 9\cdot 13}{9\cdot 64\cdot 7}} = \sqrt{1-\frac{13}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

6. Для получения фотоснимков небесных тел используются космические зонды – автономные роботы, оснащенные ракетными двигателями, собственными энергетическими установками, системами радиосвязи и навигации, научными приборами. И все это управляется бортовыми компьютерами. Например, благодаря таким зондам успешно выполнена программа исследования Сатурна и его крупнейшего спутника Титана, удивительно похожего на Землю. При изучении одного из спутников Сатурна с радиусом орбиты $R \approx 1,2\cdot 10^5\,км$ возникла нештатная ситуация: при пролете зонда сквозь плоскость колец Сатурна бортовая поворотная платформа с телекамерами была заклинена частицами этих колец. В результате смогли получить четкие снимки только одной стороны спутника. Для получения снимков обратной стороны спутника было принято решение продолжить полет зонда и встретить спутник в другой точке пространства, для чего пришлось скорректировать скорость движения зонда.

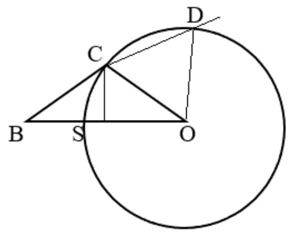
Рассмотрим упрощенную модель возникшей ситуации. Траекторию движения



спутника (орбиту) вокруг Сатурна (точка O) считаем круговой с радиусом $R = 1,2\cdot 10^5\,км$, скорость движения спутника постоянна и равна $V_T = 3{,}27$ *км/с*. Проекцию зонда на плоскость орбиты назовем подзондовой точкой. Скорость движения подзондовой точки постоянна и равна $V_1 = 6$ *км/с,* а ее траекторию в плоскости орбиты условно считаем прямой, пересекающей окружность в точках C и D. Согласно заложенной программе, съемка поверхности спутника зондом осуществляется в моменты их наибольшего сближения, которые соответствуют моментам пересечения траектории подзондовой точки с орбитой спутника (точки C и D). Когда спутник (точка S) оказывается строго на прямой между центром Сатурна (точка O) и подзондовой точкой (точка B), запускается таймер ($t_0 = 0$). При этом спутник и подзондовой точка встречаются в точке C через время $t = 2\cdot 10^4\,с$. После съемки над точкой C скорость зонда меняется так, чтобы над точкой D оказаться одновременно со спутником для фотографирования его обратной стороны. Скорость подзондовой точки на участке CD постоянна.

Определите расстояние между подзондовой точкой и спутником (считая его материальной точкой) в начальный момент времени t_0, а также скорость подзондовой точки V_2 на участке CD. В расчетах используйте приближенные значения скорости спутника и числа π - округлите их до целых значений.

Решение. Т.к. скорость V_1=6 *км/с*, а время движения тела и подзондовой точки совпадают, следовательно, $BC = 1,2 \cdot 10^5 = R$, т.е. треугольник BCO – равнобедренный. Обозначим $\angle COS = \alpha$ Тогда $BO = 2R\cos(\angle COS) \Rightarrow BS = BO - R = R(2\cos\alpha - 1)$.



$$\overset{\frown}{SC} = \frac{\pi R}{180^0} \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{180^0 \overset{\frown}{SC}}{\pi R} = \frac{180^0 V_T t}{\pi R} \approx \frac{180^0 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^4}{3 \cdot 1,2 \cdot 10^5} = \frac{36^0 \cdot 10^5}{12 \cdot 10^4} = 30^0$$

$$BS = R(2\cos 30° - 1) = 1,2 \cdot 10^5(\sqrt{3} - 1)$$

$$\angle DCO = 60^0 \Rightarrow CD = R, \ \overset{\frown}{CD} = \frac{\pi R}{3} \Rightarrow V_2 = \frac{CD}{t_2} = \frac{CD}{\overset{\frown}{CD}} V_T = \frac{3R}{\pi R} \cdot 3 \approx 3 \text{ км/с}$$

Ответ: $1,2 \cdot 10^5(\sqrt{3} - 1)$ км, 3 км/с

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика
Предмет: Математика
Класс: 10, варианты 1 и 2

Задание 1 (максимальная оценка 12 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Установлена связь (линейная зависимость) между весами слева и справа. Составлена система из четырех уравнений.	3
Один из параметров линейной зависимости определен верно.	6
Система решена с одной вычислительной ошибкой.	9
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	12

Задание 2 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже.	0
Выписана нужная последовательность, но нет обоснования того, что количество членов этой последовательности максимально, или найдено представление $a_0 = bs^n$, $a_n = br^n$, $b \in \mathbb{N}$, $q = r/s$, $r > s$ НОД(r;s)=1 или найдены обе оценки r_n и q_n	4
Найдены все ограничения, позволяющие минимизировать перебор случаев, но разбор случаев проведен с ошибкой.	8
С полным обоснованием верно найдена точная оценка для количества членов прогрессии, верно определен знаменатель прогрессии, но последовательность не выписана или допущена вычислительная ошибка.	12
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	16

Задание 3 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Доказано, что BM – биссектриса треугольника LBK.	4
Получены верные отношения длин отрезков, которые необходимы для решения задачи	8
При решении задачи допущена вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	12
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	16

Задание 4 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Уравнение сведено к системе неравенств.	4
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a.	8
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек, и/или нет полного обоснования, что полученное множество значений является окончательным.	12
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	16

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно построено сечение с полным описанием построения.	5
Найдены необходимые для решения задачи отношения, в которых плоскость сечения делит ребра пирамиды. Установлена связь расстояния от вершины пирамиды до плоскости сечения с углом между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.	10
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.	15
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	20

Задание 6 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно найдены углы между прямыми, соединяющими объекты, показанные на рисунке.	5
Верно найдено расстояние между подзондовой точкой и спутником в начальный момент времени и сделаны попытки найти измененную скорость	10
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.	15
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	20

Решение варианта №3 (Математика - 10 класс)

1. Игральный кубик подбрасывают дважды, при этом вычисляют и записывают сумму выпавших очков. Такую процедуру повторяют три раза (всего совершают шесть подбрасываний). Найдите вероятность того, что только одна из трех записанных сумм кратна трем. (12 баллов)

Решение. Сумма очков при двух подбрасываниях равна 3 в двух вариантах: (1; 2) и (2; 1). Сумма очков при двух подбрасываниях равна 6 в пяти вариантах: (1; 5), (5; 1), (2; 4), (4; 2) и (3; 3). Сумма очков при двух подбрасываниях равна 9 в четырех вариантах: (4; 5), (5; 4), (3; 6) и (6; 3). Сумма очков при двух подбрасываниях равна 12 в одном варианте: (6; 6). Итак, всего благоприятных исходов при одной процедуре – 12. Вероятность «успеха» $p=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$, вероятность «неудачи» $q=\frac{2}{3}$. Вероятность одного «успеха» в трех процедурах $P=3\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$. **Ответ:** $\frac{4}{9}$.

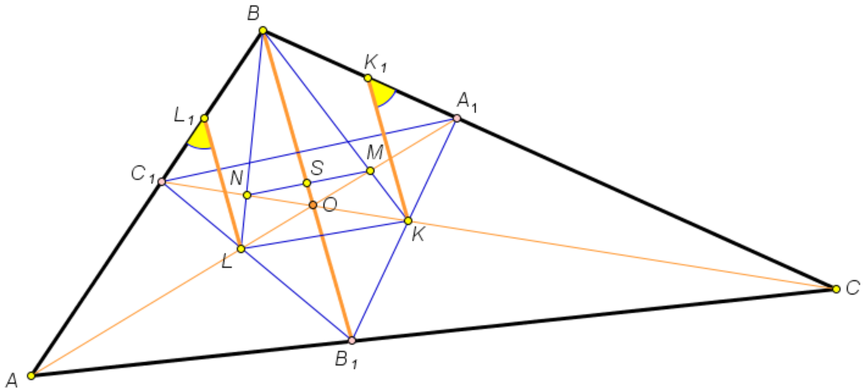
2. Найдите наименьшее натуральное число *m*, при котором выражение $148^n+m\cdot 141^n$ делится на 2023 при любом нечетном натуральном *n*. (16 баллов)

Решение. $2023=7\cdot 289$, $НОД(7;289)=1$. Поскольку n – нечетное число, то $148^n+m\cdot 141^n=(289-141)^n+m\cdot 141^n=289l+(m-1)141^n$, $l\in\mathbb{N}$. Тогда $(m-1)141^n$ должно делиться на 289. Поскольку 289 и 141 взаимно просты, то $m-1=289k$, $k\in\{0\}\cup\mathbb{N}$. С другой стороны $148^n+m\cdot 141^n=148^n+m\cdot(148-7)^n=7p+(m+1)148^n$, $p\in\mathbb{N}$. Поскольку 7 и 148 взаимно просты, то $m+1=7s$, $s\in\mathbb{N}$. Тогда $m=289k+1$ и $m=7s-1$, и $289k+1=7s-1$, $289k+2=7s$, $287k+2k+2=7s$, $2k+2=7(s-41k)$. Число $(s-41k)=2q, q\in\mathbb{N}$, и $k=7q-1, k\geq 6$. При $k=6$ имеем $m=289\cdot 6+1=1735$, и $s=248$.

Ответ: 1735.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1, L – точка пересечения отрезков B_1C_1 и AA_1, K – точка пересечения отрезков B_1A_1 и CC_1, M – точка пересечения BK и AA_1, N – точка пересечения BL и CC_1. Найдите отношение $MS{:}SN$, если S – точка пересечения биссектрисы BB_1 с отрезком MN, и $AB{:}BC{:}AC = 2{:}3{:}4$. (16 баллов)

Решение.



$$AB{:}BC{:}AC = 2{:}3{:}4,$$

$$a = BC = 3x, b = AC = 4x,$$

$$c = AB = 2x.$$

Проведем прямые

$$LL_1 \parallel BB_1, KK_1 \parallel BB_1,$$

$$L_1 \in C_1B, K_1 \in A_1B.$$

$\angle C_1L_1L = \angle A_1K_1K = \angle B/2$. По теореме Фалеса и по свойствам биссектрис имеем соотношения: $\frac{C_1L_1}{L_1B} = \frac{C_1L}{LB_1} = \frac{AC_1}{AB_1}, \frac{A_1K_1}{K_1B} = \frac{A_1K}{KB_1} = \frac{CA_1}{CB_1}$, или $\frac{C_1L_1}{L_1B} = \frac{AC_1}{AB_1}, \frac{K_1B}{A_1K_1} = \frac{CB_1}{CA_1}$,

$$\frac{C_1L_1}{L_1B} \cdot \frac{K_1B}{A_1K_1} = \frac{AC_1}{AB_1} \cdot \frac{CB_1}{CA_1}, \frac{K_1B}{L_1B} = \frac{AC_1}{AB_1} \cdot \frac{CB_1}{CA_1} \cdot \frac{A_1K_1}{C_1L_1} = \frac{\boldsymbol{AC_1}}{\boldsymbol{BC_1}} \cdot \frac{\boldsymbol{CB_1}}{\boldsymbol{AB_1}} \cdot \frac{\boldsymbol{BA_1}}{\boldsymbol{CA_1}} \cdot \frac{\boldsymbol{BC_1}}{\boldsymbol{BA_1}} \cdot \frac{\boldsymbol{A_1K_1}}{\boldsymbol{C_1L_1}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{BC_1}{BA_1} \cdot \frac{A_1K_1}{C_1L_1},$$

$$\frac{K_1B}{L_1B} = \frac{A_1K_1}{BA_1} \cdot \frac{BC_1}{C_1L_1} = \frac{KK_1}{BB_1}\frac{BB_1}{LL_1}, (\Delta A_1KK_1 \sim \Delta A_1B_1B, \ \ \Delta C_1LL_1 \sim \Delta C_1B_1B), \qquad \frac{K_1B}{L_1B} = \frac{KK_1}{LL_1}.$$

Поскольку $\angle BL_1L = \angle BK_1K$, $\frac{LL_1}{L_1B} = \frac{KK_1}{K_1B}$, то треугольники BL_1L и BK_1K подобны,

$\angle LBM = \angle L_1LB = \angle K_1KB = \angle KBM$. Следовательно, BM – биссектриса треугольника LBK, $MS{:}SN = BM{:}BN$.

По теореме Менелая для треугольника ABO имеем

$$\frac{AL}{LO} \cdot \frac{OB_1}{BB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} = 1, \frac{AL}{LO} = \frac{b}{a} \cdot \frac{BO+OB_1}{OB_1} = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a+c}{b} + 1\right) = \frac{a+c+b}{a}.$$

$$\Delta ALL_1 \sim \Delta AOB, \qquad \frac{AL}{AO} = \frac{LL_1}{BO}, \frac{AL}{AL+LO} = \frac{LL_1}{BO}, \qquad LL_1 = \frac{a+b+c}{2a+b+c} \cdot BO.$$

Аналогично, $\frac{CK}{KO} = \frac{a+c+b}{c}$, $KK_1 = \frac{a+b+c}{a+b+2c} \cdot BO$.

$$\frac{LB}{KB} = \frac{LL_1}{KK_1} = \frac{a+b+2c}{2a+b+c} = \frac{3x+4x+4x}{6x+4x+2x} = \frac{11}{12}.$$

По теореме Менелая для треугольника BKC имеем

$$\frac{BM}{MK} \cdot \frac{KO}{OC} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = 1, \frac{BM}{BK-BM} \cdot \frac{KO}{OK+KC} \cdot \frac{b}{c} = 1, \ \frac{BM}{BK-BM} = \frac{c}{b} \cdot \left(\frac{a+b+c}{c} + 1\right) = \frac{a+2c+b}{b}, \frac{BK}{BM} = \frac{a+2c+2b}{a+b+2c}.$$

Аналогично, для треугольника BLA имеем $\frac{BL}{BN} = \frac{2a+c+2b}{2a+b+c}$. Тогда $\frac{BM}{BK} \cdot \frac{BL}{BN} = \frac{a+b+2c}{a+2b+2c} \cdot \frac{2a+2b+c}{2a+b+c}$,

$$\frac{BM}{BN}=\frac{2a+b+c}{a+b+2c}\cdot\frac{a+b+2c}{a+2b+2c}\cdot\frac{2a+2b+c}{2a+b+c}=\frac{2a+2b+c}{a+2b+2c}=\frac{6x+8x+2x}{3x+8x+4x}=\frac{16}{15}.$$

Ответ: $\frac{16}{15}$.

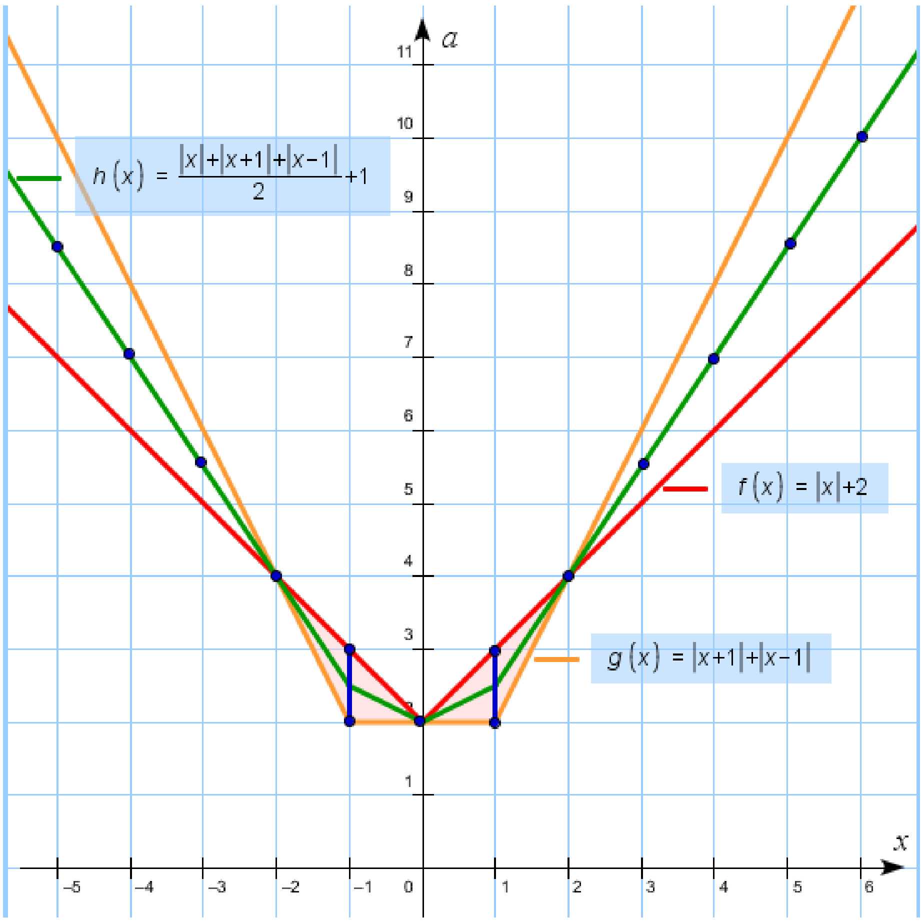
4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\big|2+|x|-a\big|-\big|a-|x+1|-|x-1|\big|=2+|x|+|x+1|+|x-1|-2a$ имеет ровно два целых решения. Укажите эти решения при каждом из найденных a. (16 баллов)

Решение:

Обозначим $u=2+|x|-a$, $v=a-|x+1|-|x-1|$. Тогда исходное уравнение будет иметь вид $|u|-|v|=u-v$. Решениями последнего уравнения являются все u и v такие, что $u\ge 0$, $v\ge 0$, или $u=v$, т.е.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2+|x|-a\ge 0,\\ a-|x+1|-|x-1|\ge 0,\end{cases}\\ 2+|x|-a=a-|x+1|-|x-1|,\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\le 2+|x|,\\ a\ge |x+1|+|x-1|,\end{cases}\\ a=1+\big(|x+1|+|x-1|+|x|\big)/2.\end{array}\right.$$

В системе Oxa построим графики функций $a=2+|x|$, $a=|x+1|+|x-1|$ и $a=1+\big(|x+1|+|x-1|+|x|\big)/2$.



Все функции четные. Если $x\ge 0$, $a=2+|x|=2+x$. Если $x\in[0;1]$, $a=|x+1|+|x-1|=2$, если $x\ge 1$, $a=|x+1|+|x-1|=2x$. Если $x\in[0;1]$, $a=1+\big(|x+1|+|x-1|+|x|\big)/2=2+x/2$, если $x\ge 1$, $a=1+\big(|x+1|+|x-1|+|x|\big)/2=1+3x/2$.

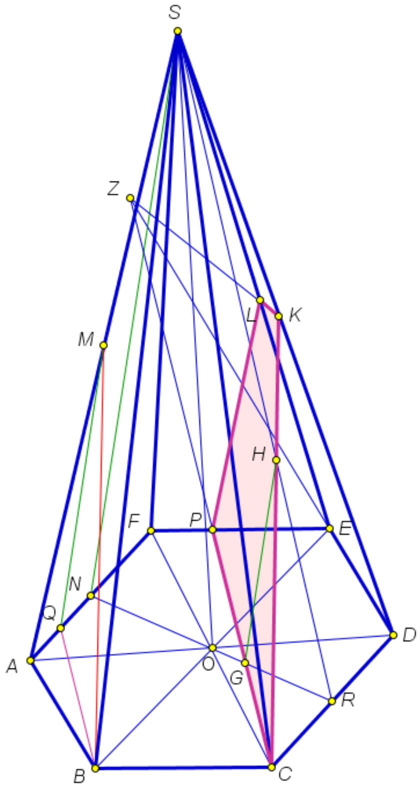
При $a\in(2;3]$ имеем два решения $x=-1$, $x=1$.

При $a=1+3n/2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, имеем два решения $x=-n$, $x=n$.

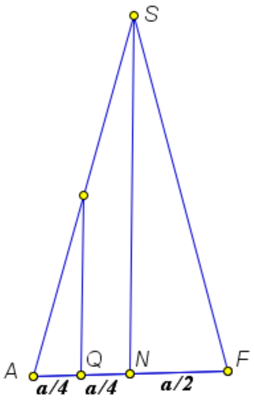
Ответ: $a\in(2;3]$ $x_1=-1$, $x_2=1$; $a=1+3n/2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, $x_1=-n$, $x_2=n$.

5. Сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ образовано плоскостью, проходящей через вершину C основания $ABCDEF$ и параллельной медиане BM боковой грани SAB и апофеме SN боковой грани SAF, сторона основания пирамиды равна 2, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно 1. Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания. (20 баллов)

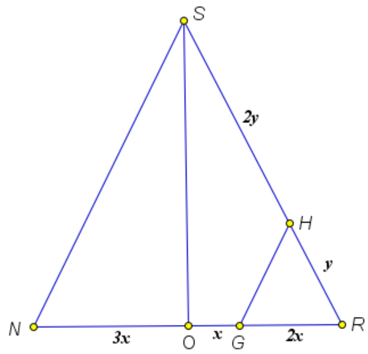
Решение. Построим сечение пирамиды. В плоскости SAF через точку M проведем прямую MQ, параллельную SN, Q принадлежит прямой AF, MQ – средняя линия треугольника $SAN, AF = a, AQ = QN = \frac{a}{4}$, где a – сторона основания пирамиды.



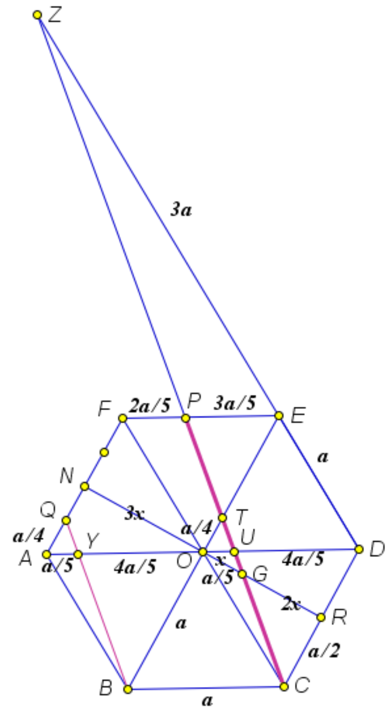
Плоскость SQB параллельна плоскости сечения. Через точку C проведем прямую CP, параллельную BQ, точка P принадлежит ребру FE и является точкой пересечения этого ребра с плоскостью сечения.



Точка Y – точка пересечения BQ и AD, треугольники YAQ и YOB подобны, $AY:YO = AQ:BO = 1:4$, $AY = a/5$, $YO = 4a/5$. Точка U – точка пересечения CP и AD, $YU = a$, $OU = a/5$, треугольники COU и CFP подобны, $OU:FP = OC:FC = 1:2$, $FP = 2a/5$, $PE = 3a/5$.

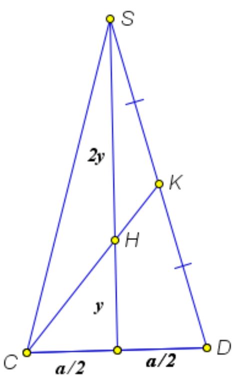


В плоскости SNR (SR – апофема грани SCD) через точку G (G – точка пересечения CP и NR) проведем прямую GH, параллельную SN, $H \in SR$. Тогда $NG:GR = SH:HR$.

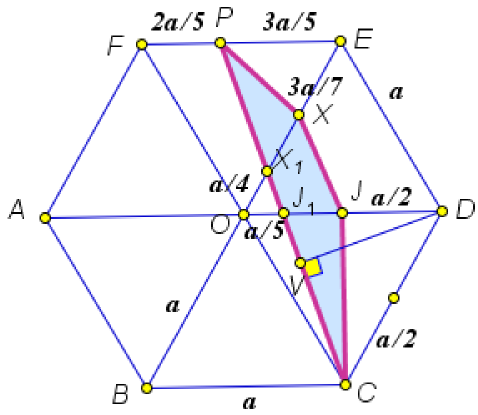


Точка T – точка пересечения CP и BE, треугольники OTU и OBY подобны, $OT:OB = OU:OY = 1:4$, $OT = a/4$. Треугольники GOT и GRC подобны, $OG:GR = OT:RC = 1:2$, $NO:OG:GR = 3:1:2$. Тогда $SH:HR = 2:1$.

Точка K – точка пересечения CH и SD. Поскольку SR – медиана SCD, $SH:HR = 2:1$, то CK также медиана.



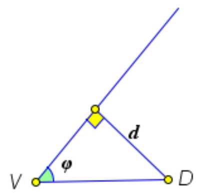
Обозначим расстояние от точки S до плоскости сечения d, $d = 1$. Расстояние от точки D до сечения равно d. В треугольнике DCJ_1 проведем высоту DV, обозначим ее длину h. Тогда $\sin\varphi = \frac{d}{h}, \cos\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{d}{h}\right)^2}$. Найдем CJ_1 по теореме косинусов:



$$CJ_1{}^2 = \frac{16a^2}{25} + a^2 - \frac{4a^2}{5} = \frac{21a^2}{25}, CJ_1 = \frac{\sqrt{21}a}{5}$$

Используя различные формулы для нахождения площади треугольника DCJ_1, имеем

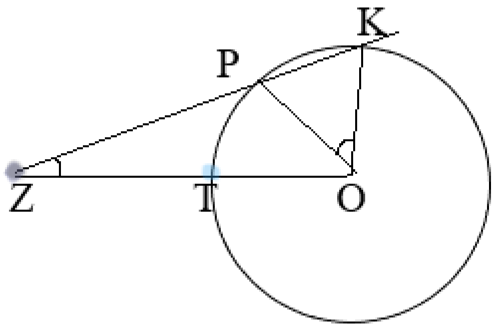
$\frac{\sqrt{21}ah}{5} = \frac{4a^2}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, h = \frac{2a}{\sqrt{7}}$. Тогда $\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{7d^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{4a^2-7d^2}}{2a} = \frac{3}{4}$.



Ответ: $\frac{3}{4}$.

6. Астрономы обнаружили за планетой Сатурн новое небесное тело, движущееся по круговой орбите, для изучения которого был направлен научно-исследовательский зонд – автономный робот, оснащенный ракетными двигателями, собственной энергетической установкой, системами радиосвязи и навигации, научными приборами, фото- и видеотехникой. И все это управляется бортовыми компьютерами. Для изучения найденного объекта было принято решение произвести фотосъемку в двух точках его орбиты. После съемок в первой точке, потребовалось скорректировать скорость движения зонда, чтобы иметь возможность сделать еще один фотоснимок небесного тела в другой точке его орбиты.

Рассмотрим упрощенную модель возникшей ситуации. Считаем изучаемый объект (небесное тело) и исследовательский зонд материальными точками, небесное тело движется по круговой орбите с центром в точке O и радиусом $R = 1,2\cdot10^6\,км$ с постоянной угловой скоростью $\omega = 0,25\cdot10^{-5}\,рад/c$. Проекцию зонда на плоскость орбиты назовем подзондовой точкой. Скорость движения подзондовой точки постоянна и равна V_1, а ее траекторию в плоскости орбиты условно считаем прямой, пересекающей окружность в точках P и K. Согласно заложенной программе, съемка небесного тела зондом осуществляется в моменты их наибольшего сближения, которые соответствуют моментам пересечения траектории подзондовой точки с орбитой тела (точки P и K). Когда небесное тело (точка T) оказывается строго на прямой между точкой O и подзондовой точкой (точка Z), запускается таймер ($t_0 = 0$). В точке P небесное тело и подзондовая точка находятся в одно и тоже время, и осуществляется съемка, после чего скорость зонда меняется так, чтобы над точкой K вновь оказаться одновременно с телом для его повторного фотографирования. Скорость подзондовой точки на участке PK постоянна.



Определите расстояние между подзондовой точкой и изучаемым телом в начальный момент времени t_0, а также скорость подзондовой точки V_2 на участке PK, если центральный угол POK равен углу PZO и в полтора раза меньше центрального угла POT. В расчетах используйте приближенное значение числа π - округлите его до целого значения.

Решение. Обозначим угол РОК - α . Треугольник РКО равнобедренный, значит два угла при основании равны $\beta = 90 - \alpha / 2$, угол РОТ равен $\frac{3\cdot\alpha}{2}$, тогда $\alpha + (\alpha + \frac{3\alpha}{2}) + 90 - \frac{\alpha}{2} = 180 \;\Rightarrow\; 3\alpha = 90 \;\Rightarrow\; \alpha = 30$.

Используем теорему синусов:

$\frac{ZP}{\sin 45} = \frac{PO}{\sin 30} \;\Rightarrow\; ZP = \frac{R\sqrt{2}/2}{1/2} = R\sqrt{2} \;\Rightarrow$ по теореме косинусов $ZP^2 = ZO^2 + PO^2 - 2ZO\cdot PO\cos 45 \;\Rightarrow\; 2R^2 = ZO^2 + R^2 - ZO\cdot R\sqrt{2}$, решая уравнение относительно ZO, получаем

$$ZO^2 - ZO\cdot R\sqrt{2} - R^2 = 0 \;\Rightarrow\; ZO = \frac{R\sqrt{2}+\sqrt{6}R}{2} \;\Rightarrow ZT = \frac{R\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2} - R = \frac{R(\sqrt{2}+\sqrt{6}-2)}{2}$$

Или по теореме синусов

$$\frac{ZP}{\sin 45} = \frac{PO}{\sin 30} = \frac{ZO}{\sin 105} \;\Rightarrow\; ZO = \frac{2R}{1}\sin 105 = 2R\cos 15 = 2R\sqrt{(1+\cos 30)/2} = R\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$V_2 = \frac{PK}{t_2},\quad t_2 = \frac{\overset{\frown}{PK}}{V_T} = \frac{\overset{\frown}{PK}}{\omega R} = \frac{\pi R}{180}\cdot\alpha\frac{1}{\omega R} = \frac{\pi\alpha}{180\omega} = \frac{3\cdot 30}{180\cdot 0,25\cdot 10^{-5}} = \frac{1}{2\cdot 25\cdot 10^{-7}} = \frac{10^6}{5} = 2\cdot 10^5$$

Значит, $V_2 = \frac{PK}{2\cdot 10^5}$. РК найдем с помощью теоремы косинусов:

$$PK^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha = 2R^2(1-\frac{\sqrt{3}}{2}) = R^2(2-\sqrt{3}) \;\Rightarrow\; PK = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$V_2 = \frac{R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\cdot 10^5} = \frac{1,2\cdot 10^6\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\cdot 10^5} = 6\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3,11\ км/с$$

Ответ: $0,6\cdot 10^6(\sqrt{2}+\sqrt{6}-2)\ км$, $\quad 6\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3,11\ км/с$

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика
Предмет: Математика
Класс: 10, варианты 3 и 4

Задание 1 (максимальная оценка 12 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно вычислены вероятности «успеха» и «неудачи» при выполнении одной процедуры (одного испытания в серии).	3
Верно записана формула вычисления вероятности требуемого числа «успехов» в описанной серии испытаний (при этом вероятность «успеха» при выполнении одной процедуры посчитана правильно).	6
Задача решена с одной вычислительной ошибкой.	9
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	12

Задание 2 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже.	0
Число 2023 (3 вар.) или 2025 (4 вар.) разложено на взаимно простые множители. Получены условия на m, при которых заданное выражение делится на эти множители.	4
Установлена связь между условиями, полученными в пункте выше.	8
При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка.	12
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	16

Задание 3 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Доказано, что BM – биссектриса треугольника LBK.	4
Получены верные отношения длин отрезков, которые необходимы для решения задачи	8
При решении задачи допущена вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	12
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	16

Задание 4 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Уравнение сведено к совокупности уравнения и системе неравенств.	4
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a.	8
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек, и/или неверно найдены решения.	12
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	16

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно построено сечение с полным описанием построения.	5
Найдены необходимые для решения задачи отношения, в которых плоскость сечения делит ребра пирамиды. Установлена связь расстояния от вершины пирамиды до плоскости сечения с углом между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.	10
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.	15
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	20

Задание 6 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно найдены углы между прямыми, соединяющими объекты	5
Верно найдено расстояние между небесным телом и подзондовой точкой в начальный момент времени и найдено расстояние РК	10
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.	15
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	20