



Решение варианта №1 (Математика - 11 класс)

1. Докажите, что многочлен $P(t) = t^3 - 2t^2 - 10t - 3$ имеет три различных действительных корня. Найдите многочлен $R(t)$ третьей степени с корнями $u = x^2y^2z$, $v = x^2z^2y$, $w = y^2z^2x$, где x, y, z – различные корни многочлена $P(t)$. (12 баллов)

Решение. Многочлен имеет 3 разных действительных корня, т. к. $P(-100) < 0$, $P(-1) > 0$, $P(0) < 0$, $P(100) > 0$. По теореме Виета $x + y + z = 2$, $xy + xz + yz = -10$, $xyz = 3$.

$$u + v + w = xyz(xy + xz + yz) = 3 \cdot (-10) = -30$$

$$uv + uw + vw = x^3y^3z^3(x + y + z) = 3^3 \cdot 2 = 54$$

$$uvw = x^5y^5z^5 = 3^5 = 243$$

Ответ: $R(t) = t^3 + 30t^2 + 54t - 243$.

2. Имеется одна подключенная к сети электрическая розетка, два удлинителя на три розетки каждый и одна настольная лампа в комплекте. Незнайка случайным образом воткнул все три вилки в 3 из 7 розеток. С какой вероятностью загорится лампа? (16 баллов)

Решение. Число равновероятных возможностей втыкания $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. Лампа может питаться через 0, 1 или 2 удлинителя.

0) Лампа включена в розетку, другие 2 вилки — куда попало. Число таких возможностей $A_6^2 = 30$.

1) Лампа включена в один из 6 разъемов удлинителя, соединенный с ней удлинитель включен в розетку, другой — куда попало. Число возможностей $6 \cdot 5 = 30$.

2) Лампа включена в один из 6 разъемов удлинителя, соединенный с ней удлинитель включен в один из 3 разъемов другого удлинителя, а тот — в розетку. Число возможностей $6 \cdot 3 = 18$.

Ответ: $P = \frac{30 + 30 + 18}{210} = 13/35$.

3. Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 внешних углов треугольника ABC пересекают продолжения противоположных сторон треугольника в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Найдите угол $A_1C_1B_1$ и длину отрезка A_1B_1 , если $AC = 5, BC = 2$, а угол ACB равен $\arccos \frac{13}{20}$. (16 баллов)

Решение.

$$b = AC = 5, a = BC = 2, c = AB,$$

$$\gamma = \angle ACB = \arccos \frac{13}{20}.$$

1) Докажем, что $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c}{b}$. Для площадей треугольников AA_1B и AA_1C имеем соотношения

$$\frac{S_{AA_1B}}{S_{AA_1C}} = \frac{BA_1}{CA_1},$$

$$S_{AA_1B} = c \cdot A_1E, S_{AA_1C} = b \cdot A_1D,$$

$A_1E = A_1D$. Отрезки A_1E и A_1D – высоты треугольников AA_1B и AA_1C . Поскольку AA_1 – биссектриса угла DAE , то прямоугольные треугольники AA_1D и AA_1E равны, и $A_1E = A_1D$. Следовательно, $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c}{b}$.

Аналогично получаем $\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{a}{b}, \frac{AB_1}{CB_1} = \frac{c}{a}$. Тогда $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1$. По теореме Менелая точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой. $\angle A_1C_1B_1 = 180^\circ, A_1B_1 = A_1C_1 + C_1B_1$.

2) По теореме косинусов найдем $c = AB$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 4 + 25 - 13 = 16, c = 4.$$

$$3) \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{4}{5}, \frac{BA_1}{2+BA_1} = \frac{4}{5}, BA_1 = 8; \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{2}{5}, \frac{BC_1}{4+BC_1} = \frac{2}{5}, BC_1 = \frac{8}{3}; \frac{AB_1}{CB_1} = \frac{4}{2}, \frac{5+CB_1}{CB_1} = \frac{4}{2}, CB_1 = 5.$$

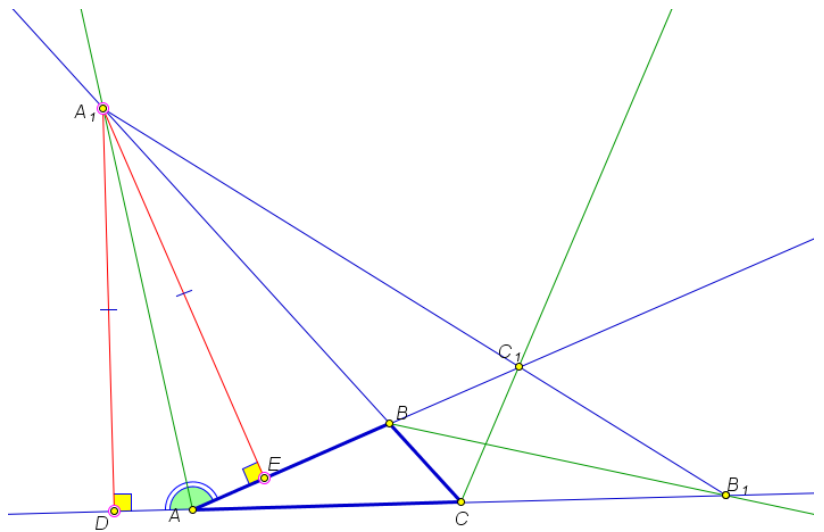
$$\alpha = \angle BAC, \cos \alpha = \frac{16+25-4}{40} = \frac{37}{40}, \beta = \angle ABC, \cos \beta = \frac{16+4-25}{16} = -\frac{5}{16}.$$

$$4) C_1B_1^2 = AC_1^2 + AB_1^2 - 2AC_1 \cdot AB_1 \cos \alpha = \frac{400}{9} + 100 - 2 \cdot \frac{200}{3} \cdot \frac{37}{40} = \frac{190}{9}, C_1B_1 = \frac{\sqrt{190}}{3}.$$

$$A_1C_1^2 = BA_1^2 + BC_1^2 - 2BA_1 \cdot BC_1 \cos \beta = 64 + \frac{64}{9} + 2 \cdot \frac{64}{3} \cdot \frac{5}{16} = \frac{4 \cdot 190}{9}, A_1C_1 = \frac{2\sqrt{190}}{3}.$$

$$A_1B_1 = A_1C_1 + C_1B_1 = \sqrt{190}.$$

Ответ: $180^\circ, \sqrt{190}$.



4. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = |a - 3|x + 1| + x + 3| + 3|x + 1|, \\ 2^{3-y} \log_{\sqrt{3}}((x + |a + 2x|)^2 - 6(x + 1 + |a + 2x|) + 16) + 2^{x+|a+2x|} \log_{1/3}(y^2 + 1) = 0, \text{ имеет единственное} \\ x + |a + 2x| \leq 3, \end{cases}$$

решение $(x; y)$, где x и y – целые числа. Укажите это решение при каждом из найденных a . (16 баллов)

Решение:

Преобразуем второе уравнение системы следующим образом:

$$2^{3-y} \log_3((x + |a + 2x|)^2 - 6(x + |a + 2x|) + 9 + 1) - 2^{x+|a+2x|} \log_3(y^2 + 1) = 0,$$

$$2^{3-y} \log_3((x + |a + 2x| - 3)^2 + 1) = 2^{x+|a+2x|} \log_3(y^2 + 1),$$

$$2^{3-x-|a+2x|} \log_3((x + |a + 2x| - 3)^2 + 1) = 2^y \log_3(y^2 + 1).$$

Из первого уравнения системы следует, что $y \geq 0$. По условию $3 - x - |a + 2x| \geq 0$. Функция

$f(y) = 2^y \log_3(y^2 + 1)$ возрастает при $y \geq 0$. Последнее уравнение $f(3 - x - |a + 2x|) = f(y)$,

следовательно, $3 - x - |a + 2x| = y$, подставляя в первое уравнение системы, получаем

$$3 - x - |a + 2x| = |a - 3|x + 1| + x + 3| + 3|x + 1|, \quad |a - 3|x + 1| + x + 3| + |a + 2x| = 3 - x - 3|x + 1|.$$

Обозначим $u = a - 3|x + 1| + x + 3$, $v = a + 2x$. Тогда исходное уравнение будет иметь вид

$|u| + |v| = u - v$. Решениями последнего уравнения являются все u и v такие, что $u \geq 0$, $v \leq 0$, или

$a - 3|x + 1| + x + 3 \geq 0$ и $a + 2x \leq 0$. Отсюда имеем $3|x + 1| - x - 3 \leq a \leq -2x$.

В системе Oax построим графики функций $a = 3|x + 1| - x - 3$ и $a = -2x$.

Если x – целое число, то $y = |a - 3|x + 1| + x + 3| + 3|x + 1|$ будет

целым, если a целое. При $a = -2$ имеем решение $x = -1$, $y = 0$. При $a = -1$ имеем решение $x = -1$, $y = 1$.

При $a = 1$ имеем решение $x = -1$, $y = 3$.

При $a = 3$ имеем решение $x = -2$, $y = 4$.

При $a = 4$ имеем решение $x = -2$, $y = 5$.

При $a = 6$ имеем решение $x = -3$, $y = 6$.

Отметим, что все полученные значения удовлетворяют неравенству

$$3 - x - |a + 2x| \geq 0.$$

Ответ: $a = -2, x = -1, y = 0$;

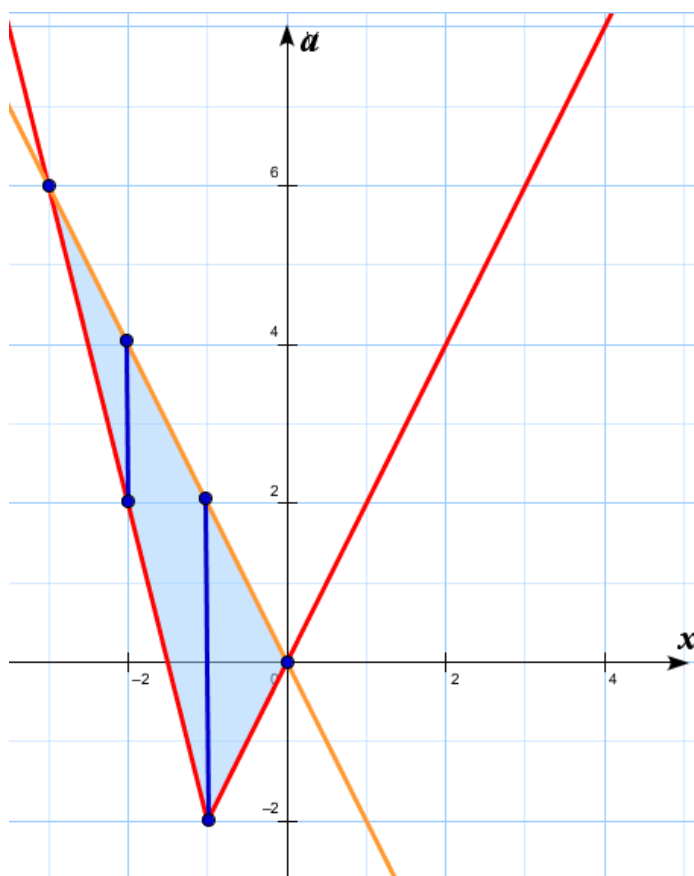
$a = -1, x = -1, y = 1$;

$a = 1, x = -1, y = 3$;

$a = 3, x = -2, y = 4$;

$a = 4, x = -2, y = 5$;

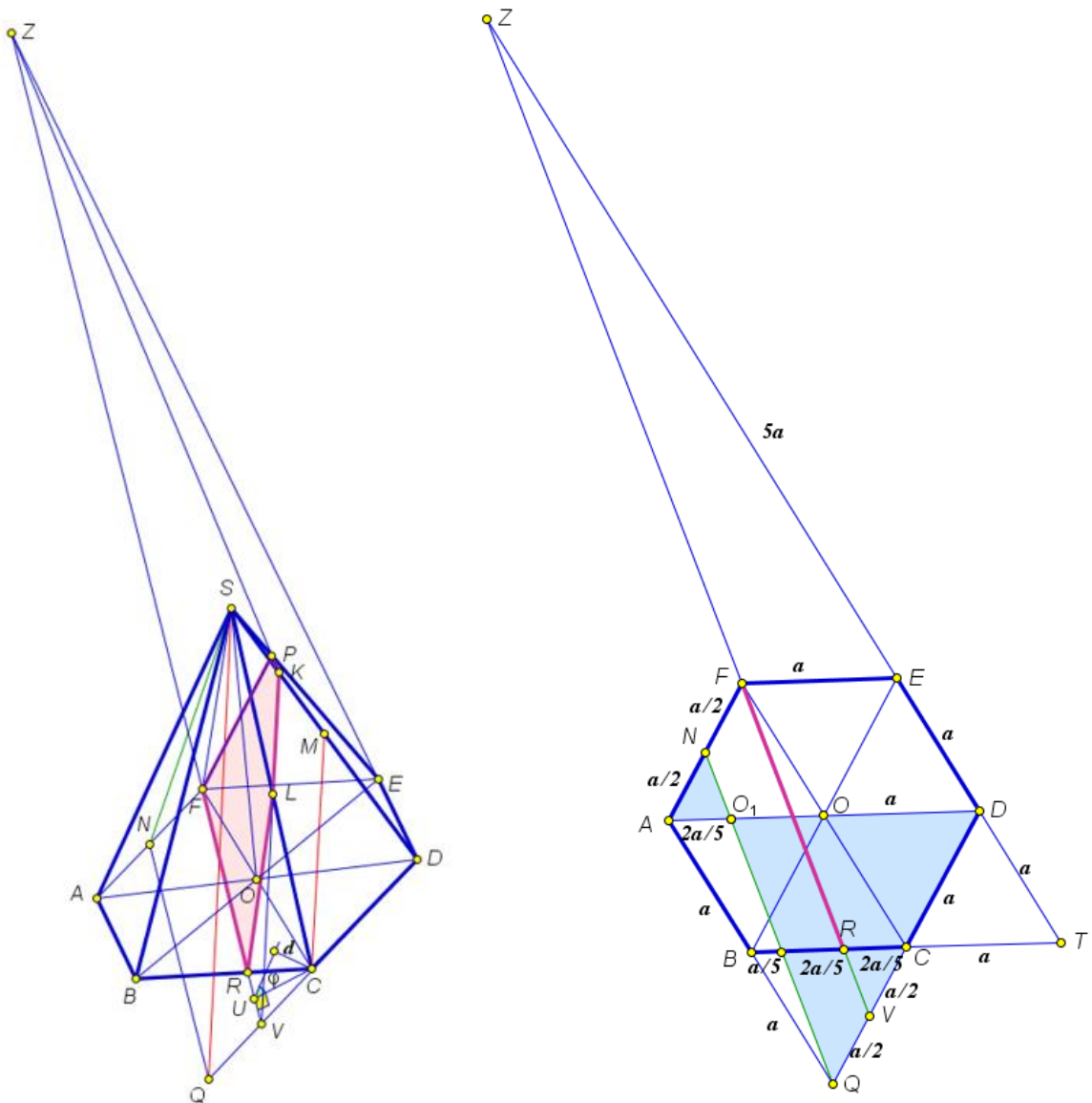
$a = 6, x = -3, y = 6$.



5. Найдите площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды $SAB CDEF$ плоскостью, проходящей через вершину F основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF , если сторона основания пирамиды равна $4\sqrt{7}$, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно $\sqrt{7}$. (20 баллов)

Решение. Построим сечение пирамиды. В плоскости SCD через точку S проведем прямую SQ , параллельную CM , Q принадлежит прямой CD , CM – средняя линия треугольника SQD , $QC = a$, где a – сторона основания пирамиды.

Плоскость SNQ параллельна плоскости сечения. Через точку F проведем прямую FV , параллельную NQ , $V \in CQ$, $QV = VC = a/2$. R – точка пересечения прямых FV и BC . Плоскость сечения пересекает основание пирамиды по отрезку FR .



O_1 – точка пересечения NQ и AD , треугольники AO_1N и DO_1Q подобны. $AO_1 : O_1D = 1 : 4$, $AO_1 = 2a/5$, $RC = AO_1 = 2a/5$.

Точка Z – точка пересечения прямых RF и DE . Точка T – точка пересечения прямых BC и DE . Треугольники FZE и RZT подобны, и $FE : RT = ZE : ZT = 5 : 7$, $ZE = 5a$.

$$RV^2 = \frac{4a^2}{25} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{5} = \frac{21a^2}{100}, RV = \frac{\sqrt{21}a}{10}$$

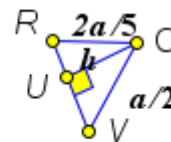
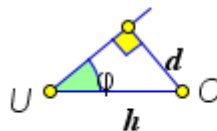
Используя различные формулы для нахождения площади треугольника RCV , имеем

$$\frac{\sqrt{21}ah}{10} = \frac{a^2}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, h = \frac{a}{\sqrt{7}}. \text{ Тогда } \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{7d^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - 7d^2}}{a} = \frac{3}{4}.$$

Окончательно имеем

$$S = \frac{303a^3\sqrt{3}}{35 \cdot 32\sqrt{a^2 - 7d^2}}, \quad S = \frac{202\sqrt{3}}{5}.$$

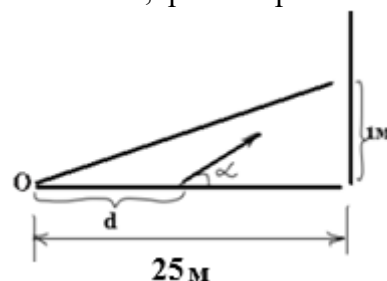
Ответ: $\frac{202\sqrt{3}}{5}.$



6. Во всем мире популярна игра в хоккей. Многое в игре зависит от вратаря. Для отработки навыков вратарей и обеспечения тренировочного процесса, который бы не зависел от других игроков, создали шайбомет. Автомат можно настроить так, чтобы он выбрасывал шайбы с заданной временной частотой, скоростью и под определенным углом. Линия ворот находится на расстоянии 25 м от центральной точки O хоккейной площадки. Пусть автомат установлен на расстоянии $d = 16 \text{ м}$ от точки O по направлению к воротам, скорость выброса шайбы равна $V_0 = 20 \text{ м/с}$. Броски производятся в плоскости, перпендикулярной поверхности льда и линии ворот. При этом для обеспечения безопасности траектория вылетающих шайб должна, с одной стороны, находиться не выше прямой линии, соединяющей центр ледовой площадки O с точкой, находящейся в плоскости полета шайб, в плоскости ворот, и на расстоянии одного метра от поверхности льда, а с другой стороны – должна пересекать плоскость ворот по нисходящей ветви траектории.

Определите максимально возможное значение тангенса угла, под которым могут вылетать шайбы из шайбомета, если траектория движения шайбы, рассматриваемой как материальная точка, в плоскости ее полета в системе координат с центром в O и осью абсцисс, направленной вдоль поверхности льда, описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x = d + V_0 t \cos \alpha, \\ y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$



Для упрощения вычислений считать, что ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Решение. Введем систему координат с центром в точке O . Ось абсцисс направим к линии ворот.

Выразим время из первого уравнения системы и подставим во второе

$$y(x) = \frac{V_0(x-d)}{V_0 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{g \left(\frac{x-d}{V_0 \cos \alpha} \right)^2}{2} = (x-d) \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \left(\frac{x-d}{V_0 \cos \alpha} \right)^2 \Rightarrow$$

$$y(x) = (x-d) \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \frac{(x-d)^2}{V_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Чтобы шайба была ниже условной линии для любого значения x , требуется выполнение условия $y_b(x) = x \frac{1}{25} \geq y(x)$ или выполнение неравенства $y_b(x) - y(x) \geq 0$ для любого $x \in [16; 25]$. Поскольку траектория вылетающих шайб должна пересекать плоскость ворот по нисходящей ветви траектории, то неравенство $x \frac{1}{25} - (x-d) \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{2} \frac{(x-d)^2}{V_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \geq 0$ должно выполняться для всех x .

Перепишем неравенство в более удобном виде и учтем, что выполнение этого неравенства возможно лишь при неположительном дискриминанте.

$$\frac{g}{2} \frac{(x-d)^2}{V_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - (x-d) \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{25} \right) + \frac{d}{25} \geq 0 \Leftrightarrow D = \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{25} \right)^2 - 4 \frac{d}{25} \frac{g}{2} \frac{1}{V_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \leq 0$$

$$\left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{25} \right)^2 - \frac{4d}{5V_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \leq 0$$

$$\left(1 - \frac{4d}{5V_0^2} \right) \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2}{25} \operatorname{tg} \alpha + \left(\frac{1}{25} \right)^2 - \frac{4d}{5V_0^2} \leq 0$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{1}{25} \right)^2 - \left(1 - \frac{4d}{5V_0^2} \right) \left(\frac{1}{25^2} - \frac{4d}{5V_0^2} \right) = \frac{4d}{5V_0^2} \frac{1}{25^2} + \frac{4d}{5V_0^2} \left(1 - \frac{4d}{5V_0^2} \right) = \frac{4d}{5V_0^2} \frac{626}{625} - \left(\frac{4d}{5V_0^2} \right)^2$$

При $d=16\text{м}$, $V_0 = 20\text{м/с}$

$$\frac{4 \cdot 16}{5 \cdot 400} \cdot \frac{626}{625} - \left(\frac{4 \cdot 16}{5 \cdot 400} \right)^2 = \frac{4}{5 \cdot 25} \cdot \frac{626}{25^2} - \left(\frac{4}{5 \cdot 25} \right)^2 = \frac{4}{25^2 \cdot 25} \left(\frac{626}{5} - 4 \right) = \frac{4 \cdot 606 \cdot 2}{25^2 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{1}{25} \pm \frac{2}{25 \cdot 5} \sqrt{\frac{121 \cdot 2}{10}} \right) / \left(\frac{121}{125} \right) = \left(\frac{1}{25} \pm \frac{2}{25 \cdot 5} \sqrt{121 \cdot 2} \right) \cdot \frac{125}{121} = \frac{5 \pm 2\sqrt{121 \cdot 2}}{121} \approx \frac{5 \pm 22}{121} = \left[\frac{27}{121} / \frac{-17}{121} \right]$$

$$\operatorname{tg} \alpha \in \left[0; \frac{5 + 2\sqrt{121 \cdot 2}}{121} \right) \approx [0; 0, 223)$$

Ответ: $\frac{5 + 2\sqrt{121 \cdot 2}}{121}$

Решение варианта №3 (Математика - 11 класс)

1. Последовательность Фибоначчи задана рекуррентно $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n \geq 2$. С каким остатком число 3 в степени a_{2022} делится на 13? (12 баллов)

Решение. Чтобы найти остаток при делении 3^n на 13, достаточно знать остаток при делении n на 3, потому что

$$3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13} \implies 3^{3k+r} \equiv 3^r \pmod{13}.$$

По индукции доказывается, что остатки при делении чисел Фибоначчи на 3 повторяются с периодом 8:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
$a_k \pmod{3}$	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	...

Поскольку 2022 делится на 8 с остатком 6, имеем

$$3^{a_{2022}} \equiv 3^{a_6} = 3^8 \equiv 3^2 = 9 \pmod{13}.$$

Ответ: 9.

2. Известно, что графики функций $f(x) = x^p$ и $g(x) = \ln x$ касаются (имеют общую точку, в которой касательные к обоим графикам совпадают). Найдите константу p и точку касания. (16 баллов)

Решение. Поскольку графики имеют общую касательную, то для абсциссы точки касания выполняются следующие соотношения:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \implies \begin{cases} x^p = \ln x \\ px^{p-1} = 1/x \end{cases} \implies \begin{cases} x^p = \ln x \\ x^p = 1/p \end{cases} \implies \ln x = \frac{1}{p} \implies x = e^{1/p}, \quad x^p = e = \ln x.$$

Таким образом, $x = e^e$, $p = \frac{1}{e}$, $y = e$.

Ответ: $p = \frac{1}{e}$, точка касания $(e^e; e)$.

3. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O , причем $AO:OA_1 = 2:1$. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает прямую AB в точке C_1 . Найдите угол $B_1A_1C_1$ и длину отрезка A_1C_1 , если $AB = 2, AC = 4$. (16 баллов)

Решение.

$$a = BC, b = AC = 4, c = AB = 2,$$

$$AO:OA_1 = 2:1.$$

1) По свойствам биссектрис имеем

$$AB:BA_1 = AO:OA_1 = 2:1, BA_1 = \frac{c}{2},$$

$$AC:CA_1 = AO:OA_1 = 2:1, CA_1 = \frac{b}{2},$$

$$BC = \frac{b+c}{2} = 3.$$

2) Докажем, что $\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{a}{b}$. Для площадей

треугольников AC_1C и BC_1C имеем соотношения

$$\frac{S_{AC_1C}}{S_{BC_1C}} = \frac{BC_1}{AC_1},$$

$$S_{AC_1C} = b \cdot C_1E, S_{BC_1C} = a \cdot C_1D,$$

$C_1E = C_1D$. Отрезки C_1E и C_1D – высоты треугольников AC_1C и BC_1C . Поскольку CC_1 – биссектриса угла DCE , то прямоугольные треугольники CC_1D и CC_1E равны, и $C_1E = C_1D$.

Следовательно, $\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{a}{b}$. По свойствам биссектрис $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c}{b}$, $\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{c}{a}$. Тогда $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{c}{b} \cdot$

$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1$. По теореме Менелая точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой. $\angle B_1A_1C_1 = 180^\circ$,

$$B_1C_1 = B_1A_1 + A_1C_1.$$

$$3) \frac{AB_1}{CB_1} = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}, AB_1 = \frac{8}{5}, CB_1 = \frac{12}{5}; CA_1 = 2; \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{3}{4}, \frac{BC_1}{2+BC_1} = \frac{3}{4}, BC_1 = 6, AC_1 = 8.$$

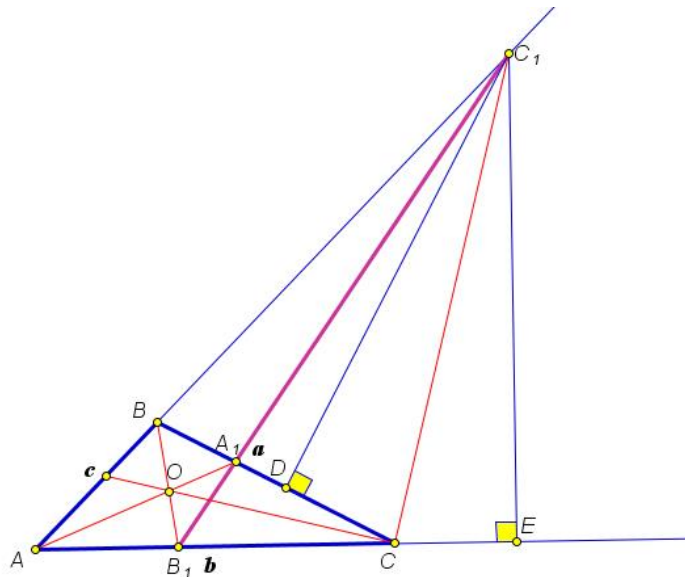
$$\alpha = \angle BAC, \cos \alpha = \frac{4+16-9}{16} = \frac{11}{16}, \gamma = \angle ACB, \cos \gamma = \frac{9+16-4}{24} = \frac{7}{8}.$$

$$4) C_1B_1^2 = AC_1^2 + AB_1^2 - 2AC_1 \cdot AB_1 \cos \alpha = 64 + \frac{64}{25} - 2 \cdot \frac{64}{5} \cdot \frac{11}{16} = \frac{1224}{25}, C_1B_1 = \frac{6\sqrt{34}}{5}.$$

$$A_1B_1^2 = CA_1^2 + CB_1^2 - 2CA_1 \cdot CB_1 \cos \gamma = 4 + \frac{144}{25} - 2 \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{34}{25}, A_1B_1 = \frac{\sqrt{34}}{5}.$$

$$A_1C_1 = B_1C_1 - A_1B_1 = \sqrt{34}.$$

Ответ: $180^\circ, \sqrt{34}$.



4. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $\log_{\sqrt{a/10}} \left(\frac{a+8x-x^2}{20} \right) \geq 2$

имеет хотя бы одно решение $x \geq 2$, и каждое решение неравенства также является решением уравнения $|a+2x-16|+|a-2x+9|=|2a-7|$. (16 баллов)

Решение:

$$\log_{\sqrt{a/10}} \left(\frac{a+8x-x^2}{20} \right) \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+8x-x^2 > 0, \\ a > 0, \\ a \neq 10, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\sqrt{a/10} - 1 \right) \left(\frac{a+8x-x^2}{20} - \frac{a}{10} \right) \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > x^2 - 8x, \\ a > 0, \\ a \neq 10, \end{array} \right. \quad \text{В системе Ох} \quad \left(a-10 \right) (8x-x^2-a) \geq 0.$$

изобразим множество решений данной системы. Это области на рисунке, окрашенные голубым и зеленым цветом. Рассмотрим уравнение $|a+2x-16|+|a-2x+9|=|2a-7|$.

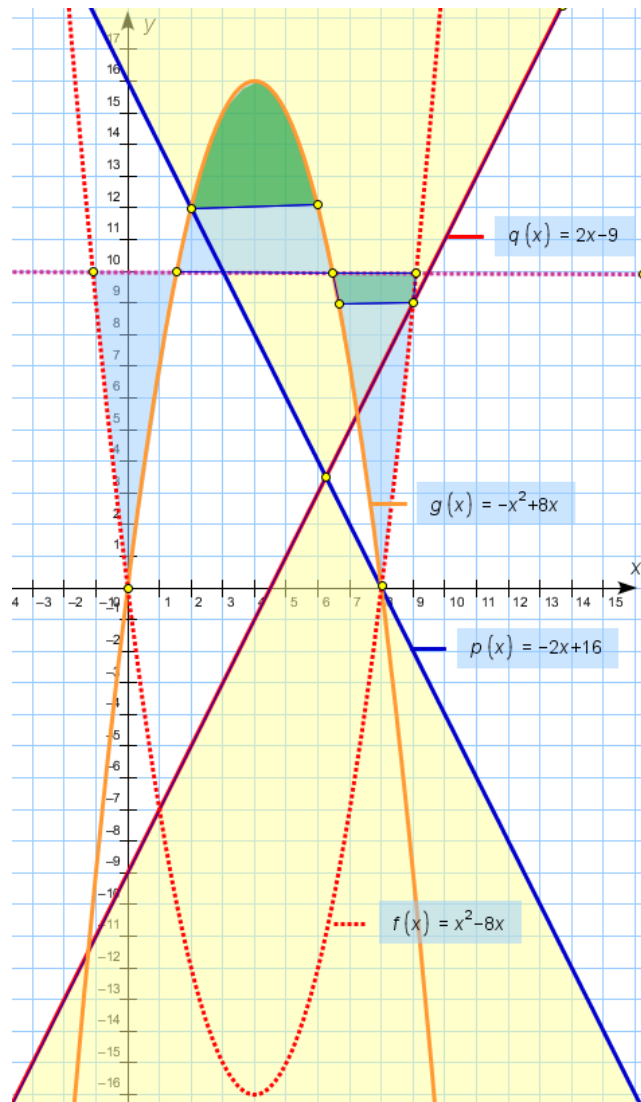
Обозначим $u = a+2x-16$, $v = a-2x+9$. Тогда исходное уравнение будет иметь вид $|u|+|v|=|u+v|$. Решениями последнего уравнения являются все u и v такие, что $uv \geq 0$, или $(a+2x-16)(a-2x+9) \geq 0$. В системе Ох

множеством решений последнего неравенства является область между двумя прямыми $a+2x-16=0$ и $a-2x+9=0$, окрашенная на рисунке желтым цветом.

Каждое решение $x \geq 2$ неравенства $\log_{\sqrt{a/10}} \left(\frac{a+8x-x^2}{20} \right) \geq 2$ является решением уравнения

$$|a+2x-16|+|a-2x+9|=|2a-7| \text{ при } a \in [9; 10) \cup [12; 16].$$

Ответ: $a \in [9; 10) \cup [12; 16]$.



5. Найдите площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью, проходящей через вершину C основания $ABCDEF$ и параллельной медиане BM боковой грани SAB и апофеме SN боковой грани SAF , если сторона основания пирамиды равна 2, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно 1. (20 баллов)

Решение. Построим сечение пирамиды. В плоскости SAF через точку M проведем прямую MQ , параллельную SN , Q принадлежит прямой AF , MQ – средняя линия треугольника SAN , $AF = a$, $AQ = QN = \frac{a}{4}$, где a – сторона основания пирамиды.

Плоскость SQB параллельна плоскости сечения. Через точку C проведем прямую CP , параллельную BQ , точка P принадлежит ребру FE и является точкой пересечения этого ребра с плоскостью сечения.

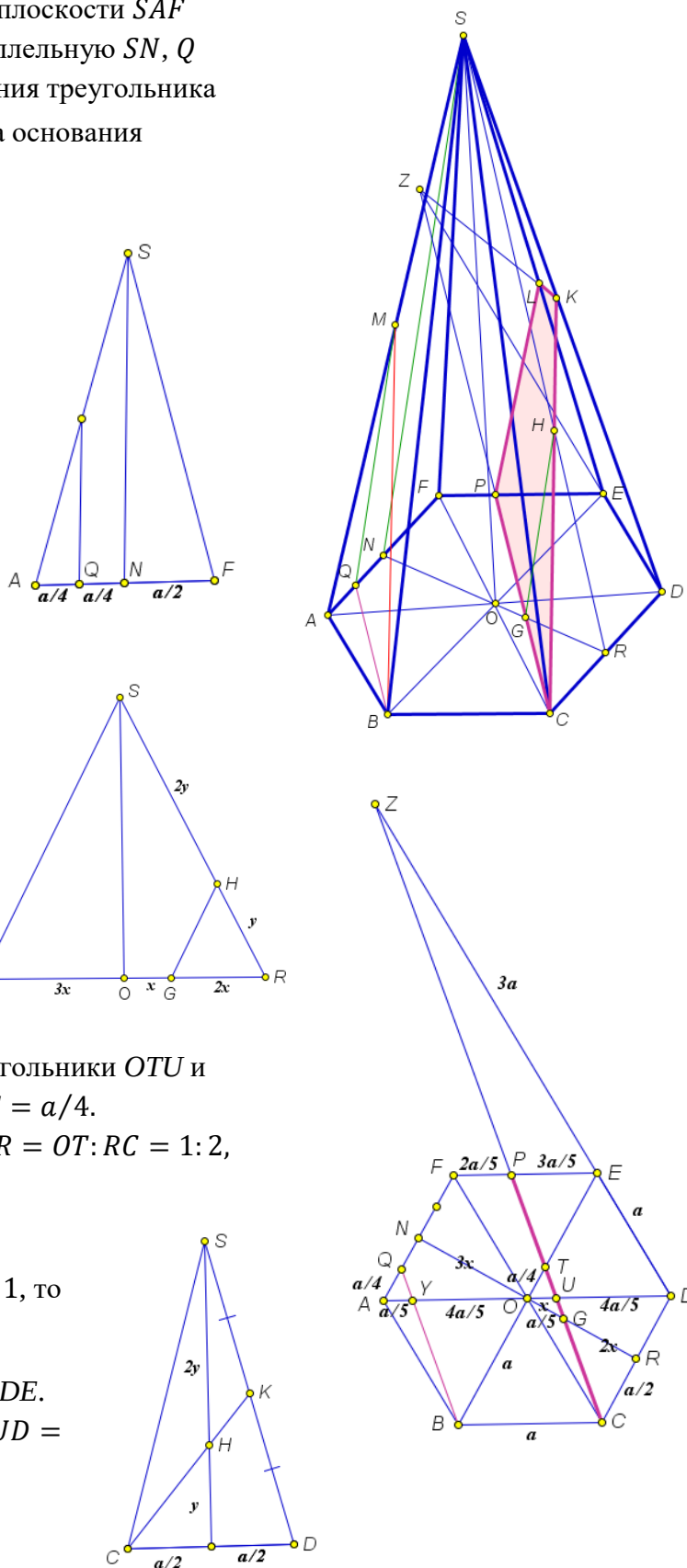
Точка Y – точка пересечения BQ и AD , треугольники YAQ и YOB подобны, $AY:YO = AQ:BO = 1:4$, $AY = a/5$, $YO = 4a/5$. Точка U – точка пересечения CP и AD , $YU = a$, $OU = a/5$, треугольники COU и CFP подобны, $OU:FP = OC:FC = 1:2$, $FP = 2a/5$, $PE = 3a/5$.

В плоскости SNR (SR – апофема грани SCD) через точку G (G – точка пересечения CP и NR) проведем прямую GH , параллельную SN , $H \in SR$. Тогда $NG:GR = SH:HR$.

Точка T – точка пересечения CP и BE , треугольники OTU и OBY подобны, $OT:OB = OU:OY = 1:4$, $OT = a/4$. Треугольники GOT и GRC подобны, $OG:GR = OT:RC = 1:2$, $NO:OG:GR = 3:1:2$. Тогда $SH:HR = 2:1$.

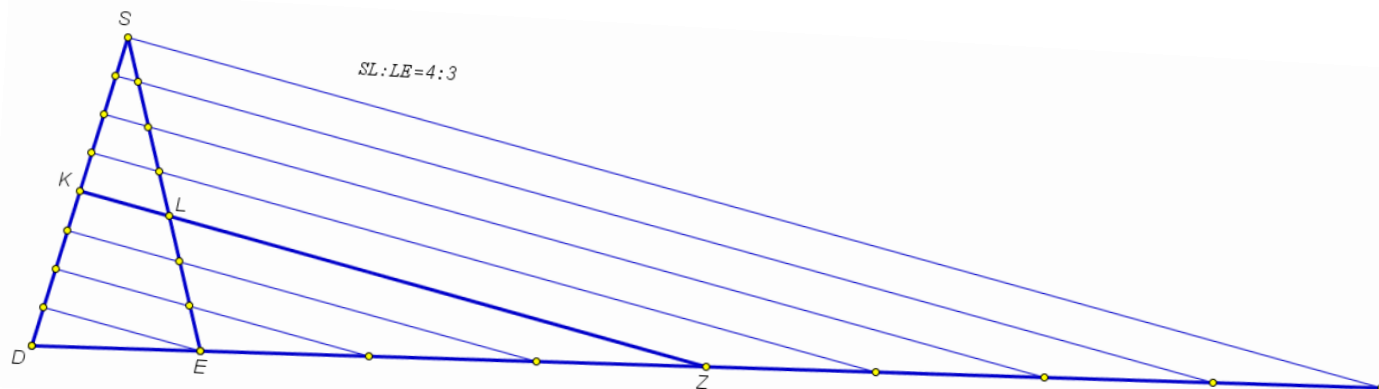
Точка K – точка пересечения CH и SD . Поскольку SR – медиана SCD , $SH:HR = 2:1$, то SK также медиана.

Точка Z – точка пересечения прямых CP и DE . Треугольники PZE и UZD подобны, и $PE:UD = ZE:ZD = 3:7$, $ZE = 3a$.



В плоскости SDE точка L – точка пересечения прямых ZK и SE . По теореме Фалеса имеем $SL:LE = 4:3$.

Искомое сечение $CKLP$.



Площадь сечения будем вычислять по формуле $S_{сеч} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi}$, где S_{np} - площадь проекции

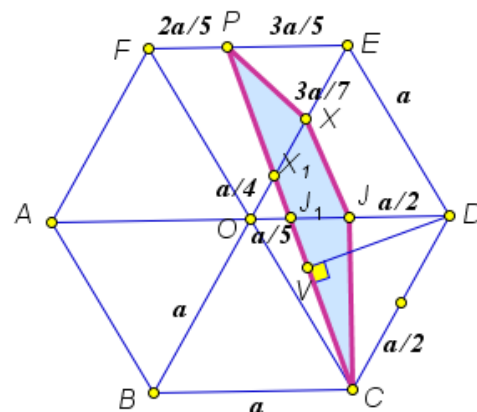
сечения на плоскость основания, φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания.

Проекцией является пятиугольник $CJXP$. Площадь проекции сечения вычисляется по формуле

$$S_{np} = S_{CJ_1J} + S_{J_1JXX_1} + S_{XX_1P} =$$

$$\frac{3a^2\sqrt{3}}{40} + \left(\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{51a^2\sqrt{3}}{280},$$

$$S_{np} = \frac{51\sqrt{3}}{70}.$$



Обозначим расстояние от точки S до плоскости сечения d , $d = 1$. Расстояние от точки D до сечения равно d . В треугольнике DCJ_1 проведем высоту DV , обозначим ее длину h . Тогда

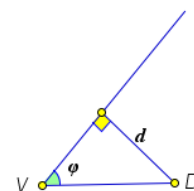
$\sin \varphi = \frac{d}{h}$, $\cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{h}\right)^2}$. Найдем CJ_1 по теореме косинусов:

$$CJ_1^2 = \frac{16a^2}{25} + a^2 - \frac{4a^2}{5} = \frac{21a^2}{25}, CJ_1 = \frac{\sqrt{21}a}{5}$$

Используя различные формулы для нахождения площади треугольника DCJ_1 , имеем

$$\frac{\sqrt{21}ah}{5} = \frac{4a^2}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, h = \frac{2a}{\sqrt{7}}. \text{ Тогда } \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{7d^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{4a^2 - 7d^2}}{2a} = \frac{3}{4}.$$

Окончательно имеем $S = \frac{51a^3\sqrt{3}}{140\sqrt{4a^2 - 7d^2}}$, $S = \frac{34\sqrt{3}}{35}$. **Ответ:** $\frac{34\sqrt{3}}{35}$.



6. Во всем мире популярна игра в хоккей. Многое в игре зависит от вратаря. Для отработки навыков вратарей и обеспечения тренировочного процесса, который бы не зависел от других игроков, создали шайбомет. Автомат можно настроить так, чтобы он выбрасывал шайбы с заданной временной частотой, скоростью и под определенным углом.

Пусть автомат установлен на льду на расстоянии $l = 12$ м от ворот. Броски производятся в плоскости, перпендикулярной поверхности льда и линии ворот, с некоторой фиксированной начальной скоростью выброса шайбы V_0 и под различными углами α к поверхности льда. Примем точку выброса за начало отсчета системы координат. Ось абсцисс направим перпендикулярно центральной линии хоккейной площадки в сторону ворот. Ось ординат – вверх, перпендикулярно поверхности льда. В распоряжении вратаря имеется ловушка для шайб, изображенная на рисунке точкой M . Траектория движения шайбы, находящейся в воздухе и рассматриваемой как материальная точка, в зависимости от времени t в указанной системе координат



описывается уравнениями:
$$\begin{cases} x = V_0 t \cos \alpha, \\ y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$
 Определите диапазон возможных значений

квадрата начальной скорости выброса шайбы, при каждом из которых шайба попадает в ловушку и максимально возможная высота ловушки в моменты захвата шайбы не превосходит 1 м. Для упрощения вычислений считать, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Решение. Выразим время из первого уравнения системы и подставим во второе

$$y(x) = \frac{V_0 x}{V_0 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{g \left(\frac{x}{V_0 \cos \alpha} \right)^2}{2} = x \tan \alpha - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{V_0 \cos \alpha} \right)^2 \Rightarrow$$

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2} \frac{(x)^2}{V_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) \Rightarrow h = l \tan \alpha - \frac{g}{2} \frac{(l)^2}{V_0^2} (1 + \tan^2 \alpha).$$

Чтобы шайба попала в ловушку на высоте h , требуется выполнение условия
$$\frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) - l \tan \alpha + h = 0 \Rightarrow \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} \tan^2 \alpha - l \tan \alpha + h + \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} = 0,$$

$$D = (l)^2 - 4 \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} (h + \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2}) = 0 \Rightarrow h_{\max} = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2}.$$

При этом
$$\tan \alpha = \frac{l}{gl^2 / V_0^2} = \frac{V_0^2}{gl}.$$

Это же можно было получить, выделив полный квадрат,

$$h = l \tan \alpha - \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) = -\frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} \left(\tan \alpha - \frac{V_0^2}{gl} \right)^2 + \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} \leq \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2}.$$

Определим диапазон изменения квадрата скорости, если $l = 12$ м и $0 \leq h_{\max} \leq 1$:

$$0 \leq h = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2} \frac{144}{V_0^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{V_0^4 - g^2 \cdot 144}{2gV_0^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} V_0^4 \geq 144g^2 \\ V_0^4 - 2gV_0^2 - g^2 \cdot 144 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_0^4 \geq 144g^2 \\ V_0^4 - 2gV_0^2 - g^2 \cdot 144 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_0^2 \geq 12g \\ (V_0^2 - g)^2 - g^2 \cdot 145 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V_0^2 \geq 12g \\ \left((V_0^2 - g) - g \cdot \sqrt{145} \right) \underbrace{\left((V_0^2 - g) + g \cdot \sqrt{145} \right)}_{>0} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_0^2 \geq 12g \\ V_0^2 \leq g + g \cdot \sqrt{145} \end{cases} \Rightarrow 12g \leq V_0^2 \leq g + g \cdot \sqrt{145}$$

$$120 \leq V_0^2 \leq 10 + 10 \cdot \sqrt{145}$$

Ответ: $120 \leq V_0^2 \leq 10 + 10 \cdot \sqrt{145}$ или приближенно $[120; 130]$



Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика

Предмет: Математика

Класс: 11, варианты 1 и 2

Задание 1 (максимальная оценка 12 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Доказано, что многочлен $P(t)$ имеет три различных действительных корня, или установлена связь между коэффициентами этого многочлена и его корнями.	3
Доказано, что многочлен $P(t)$ имеет три различных действительных корня, установлена связь между коэффициентами этого многочлена и его корнями. Верно записаны условия, позволяющие найти коэффициенты многочлена $R(t)$.	6
При решении задачи допущена вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	9
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	12

Задание 2 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Перечислены все три схемы включения. Для одной из схем верно вычислено число комбинаций.	4
Перечислены все три схемы включения. Для двух из схем верно вычислено число комбинаций.	8
Перечислены все три схемы включения. Для всех трех схем верно вычислено число комбинаций. Итоговая вероятность посчитана с ошибкой.	12
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	16

Задание 3 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Доказано, что точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой.	4
Доказано, что точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой, верно найдена длина отрезка A_1C_1 или B_1C_1 .	8
При решении задачи допущена вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	12
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	16

Задание 4 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Второе уравнение системы преобразовано в уравнение, не содержащее показательной и логарифмической функций.	4
Получена система неравенств, позволяющая определить x в зависимости от параметра a .	8
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	12
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	16

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно построено сечение с описанием построения и частично найдены отношения, в которых плоскость сечения делит ребра пирамиды.	5
Верно найдена площадь проекции сечения на плоскость основания или косинус угла между плоскостью сечения и основанием, при этом верно построено сечение с описанием построения и найдены все отношения, в которых плоскость сечения делит ребра пирамиды.	10
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.	15
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	20

Задание 6 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно составлены функция траектории шайбы и функция границы, а также выписаны ограничения на взаимное расположение этих функций	5
Верно составлено соотношение для нахождения максимально возможного тангенса угла вылета шайбы и верно выписан дискриминант квадратного уравнения для этого тангенса	10
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка или решение выписано верно в общем виде и численное решение не доведено до конца.	15
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	20

Правила выставления баллов за выполнение заданий

№	Критерии оценивания задания	Баллы
1.	Последовательности	0, 3, 6, 9, 12
	Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
	Доказана периодичность деления 3^n на 13.	3
	Доказана периодичность деления 3^n на 13 и периодичность остатков при делении чисел Фибоначчи на 3.	6
	При решении задачи допущена вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	9
	Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	12
2.	Производные	0, 4, 8, 12, 16
	Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
	Правильно вычислены производные функций, записано их равенство.	4
	Составлена система уравнений, выражена одна переменная через другую (x через p или p через x).	8
	При решении задачи допущена вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	12
	Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	16
3.	Планиметрия	0, 4, 8, 12, 16
	Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
	Доказано, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.	4
	Доказано, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, верно найдена длина отрезка A_1B_1 или B_1C_1 .	8
	При решении задачи допущена вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	12
	Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	16
4.	Система с параметром	0, 4, 8, 12, 16
	Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
	Для неравенства выписаны все необходимые ограничения и проведено потенцирование, для уравнения получено эквивалентное неравенство.	4
	С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	8

С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.		12
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.		16
5.	Стереометрия	0, 5, 10, 15, 20
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.		0
Верно построено сечение с описанием построения и частично найдены отношения, в которых плоскость сечения делит ребра пирамиды.		5
Верно найдена площадь проекции сечения на плоскость основания или косинус угла между плоскостью сечения и основанием, при этом верно построено сечение с описанием построения и найдены все отношения, в которых плоскость сечения делит ребра пирамиды.		10
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.		15
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.		20
6.	Ситуационная задача	0, 5, 10, 15, 20
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.		0
Верно описана математическая модель, получены необходимые соотношения.		5
Найдена верно одна из границ диапазона.		10
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.		15
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.		20