



Профиль: математика

Вариант: 1

Класс: 10

Задача 1 (12 баллов). В кружке «Неумелые руки» методом тяп-ляп изготовили несбалансированные рычажные весы с плечами разной длины и чашами с разным собственным весом. В результате четырех взвешиваний на этих весах были получены следующие «равновесия»:

[слева 3 кг = справа дыня]; [слева дыня = справа 5,5 кг];

[слева 5 кг = справа арбуз]; [слева арбуз = справа 10 кг].

Каков истинный вес (масса) дыни и арбуза?

Задача 2 (16 баллов). Какое максимальное возможное количество идущих подряд членов возрастающей геометрической прогрессии могут быть 3-значными натуральными числами? Приведите пример такой последовательности.

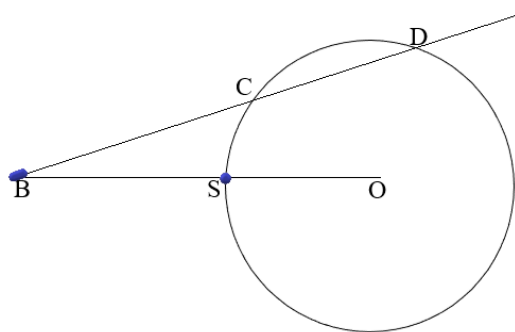
Задача 3 (16 баллов). В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 , L – точка пересечения отрезков B_1C_1 и AA_1 , K – точка пересечения отрезков B_1A_1 и CC_1 . Найдите отношение $LM:MK$, если M – точка пересечения биссектрисы BB_1 с отрезком LK , и $AB:BC:AC = 2:3:4$.

Задача 4 (16 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|a - 3|x + 0,5| + |x + 2,5| + |a - x^2| = x^2 + x - 3|x + 0,5| + 2,5$ имеет ровно два целых решения.

Задача 5 (20 баллов). Сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ образовано плоскостью, проходящей через центр основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF , сторона основания пирамиды равна 8, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно $3\sqrt{13/7}$. Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.



Задача 6 (20 баллов). Для получения фотоснимков небесных тел используются космические зонды – автономные роботы, оснащенные ракетными двигателями, собственными энергетическими установками, системами радиосвязи и навигации, научными приборами. И все это управляется бортовыми компьютерами. Например, благодаря таким зондам успешно выполнена программа исследования Сатурна и его крупнейшего спутника Титана, удивительно похожего на Землю. При изучении одного из спутников Сатурна с радиусом орбиты $R \approx 1,2 \cdot 10^5$ км возникла нештатная ситуация: при пролете зонда сквозь плоскость колец Сатурна бортовая поворотная платформа с телекамерами была закинута частицами этих колец. В результате смогли получить четкие снимки только одной стороны спутника. Для получения снимков обратной стороны спутника было принято решение продолжить полет зонда и встретить спутник в другой точке пространства, для чего пришлось скорректировать скорость движения зонда.



Рассмотрим упрощенную модель возникшей ситуации. Траекторию движения спутника (орбиту) вокруг Сатурна (точка O) считаем круговой с радиусом $R = 1,2 \cdot 10^5$ км, скорость движения спутника постоянна и равна $V_T = 3,27$ км/с. Проекцию зонда на плоскость орбиты назовем подзондовой точкой. Скорость движения подзондовой точки постоянна и равна $V_I = 6$ км/с, а ее траекторию в плоскости орбиты условно считаем прямой, пересекающей окружность в точках C и D . Согласно заложенной программе, съемка поверхности спутника зондом осуществляется в моменты их наибольшего сближения, которые соответствуют моментам пересечения траектории подзондовой точки с орбитой спутника (точки C и D). Когда спутник (точка S) оказывается строго на прямой между центром Сатурна (точка O) и подзондовой точкой (точка B), запускается таймер ($t_0 = 0$). При этом спутник и подзондовая точка встречаются в точке C через время $t = 2 \cdot 10^4$ с. После съемки над точкой C скорость зонда меняется так, чтобы над точкой D оказаться одновременно со спутником для фотографирования его обратной стороны. Скорость подзондовой точки на участке CD постоянна.

Определите расстояние между подзондовой точкой и спутником (считая его материальной точкой) в начальный момент времени t_0 , а также скорость подзондовой точки V_2 на участке CD . В расчетах используйте приближенные значения скорости спутника и числа π – округлите их до целых значений.



Профиль: математика

Вариант: 3

Класс: 10

Задача 1 (12 баллов). Игральный кубик подбрасывают дважды, при этом вычисляют и записывают сумму выпавших очков. Такую процедуру повторяют три раза (всего совершают шесть подбрасываний). Найдите вероятность того, что только одна из трех записанных сумм кратна трем.

Задача 2 (16 баллов). Найдите наименьшее натуральное число m , при котором выражение $148^n + m \cdot 141^n$ делится на 2023 при любом нечетном натуральном n .

Задача 3 (16 баллов). В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 , L – точка пересечения отрезков B_1C_1 и AA_1 , K – точка пересечения отрезков B_1A_1 и CC_1 , M – точка пересечения BK и AA_1 , N – точка пересечения BL и CC_1 . Найдите отношение $MS:SN$, если S – точка пересечения биссектрисы BB_1 с отрезком MN , и $AB:BC:AC = 2:3:4$.

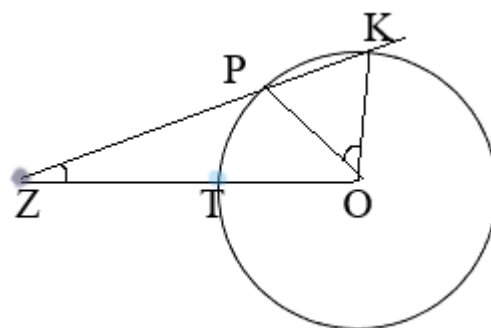
Задача 4 (16 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|2+|x|-a|-|a-|x+1||-|x-1|| = 2+|x|+|x+1|+|x-1|-2a$ имеет ровно два целых решения. Укажите эти решения при каждом из найденных a .

Задача 5 (20 баллов). Сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ образовано плоскостью, проходящей через вершину S основания $ABCDEF$ и параллельной медиане BM боковой грани SAB и апофеме SN боковой грани SAF , сторона основания пирамиды равна 2, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно 1. Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Задача 6 (20 баллов). Астрономы обнаружили за планетой Сатурн новое небесное тело, движущееся по круговой орбите, для изучения которого был направлен научно-исследовательский зонд – автономный робот, оснащенный ракетными двигателями, собственной энергетической установкой, системами радиосвязи и навигации, научными приборами, фото- и видеотехникой. И все это управляется бортовыми компьютерами. Для изучения найденного объекта было принято решение произвести фотосъемку в двух точках его орбиты. После съемок в первой точке, потребовалось скорректировать скорость движения зонда, чтобы иметь возможность сделать еще один фотоснимок небесного тела в другой точке его орбиты.



Рассмотрим упрощенную модель возникшей ситуации. Считаем изучаемый объект (небесное тело) и исследовательский зонд материальными точками, небесное тело движется по круговой орбите с центром в точке O и радиусом $R = 1,2 \cdot 10^6$ км с постоянной угловой скоростью $\omega = 0,25 \cdot 10^{-5}$ рад/с. Проекцию зонда на плоскость орбиты назовем подзондовой точкой. Скорость движения подзондовой точки постоянна и равна V_1 , а ее траекторию в плоскости орбиты условно считаем прямой, пересекающей окружность в точках P и K . Согласно заложенной программе, съемка небесного тела зондом осуществляется в моменты их наибольшего сближения, которые соответствуют моментам пересечения траектории подзондовой точки с орбитой тела (точки P и K). Когда небесное тело (точка T) оказывается строго на прямой между точкой O и подзондовой точкой (точка Z), запускается таймер ($t_0 = 0$). В точке P небесное тело и подзондовая точка находятся в одно и то же время, и осуществляется съемка, после чего скорость зонда меняется так, чтобы над точкой K вновь оказаться одновременно с телом для его повторного фотографирования. Скорость подзондовой точки на участке PK постоянна.



Определите расстояние между подзондовой точкой и изучаемым телом в начальный момент времени t_0 , а также скорость подзондовой точки V_2 на участке PK , если центральный угол POK равен углу PZO и в полтора раза меньше центрального угла POT . В расчетах используйте приближенное значение числа π - округлите его до целого значения.