Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Профиль: математика

Вариант: 1 Класс: 11

Задача 1 (12 *баллов*). Докажите, что многочлен $P(t)=t^3-2t^2-10t-3$ имеет три различных действительных корня. Найдите многочлен $R(t)$ третьей степени с корнями $u=x^2y^2z,\ v=x^2z^2y,\ \ w=y^2z^2x,$ где x, y, z – различные корни многочлена $P(t)$.

Задача 2 (16 *баллов*). Имеется одна подключенная к сети электрическая розетка, два удлинителя на три розетки каждый и одна настольная лампа в комплекте. Незнайка случайным образом воткнул все три вилки в 3 из 7 розеток. С какой вероятностью загорится лампа?

Задача 3 (16 *баллов*). Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 внешних углов треугольника ABC пересекают продолжения противоположных сторон треугольника в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Найдите угол $A_1C_1B_1$ и длину отрезка A_1B_1, если $AC=5, BC=2$, а угол ACB равен $\arccos\frac{13}{20}$.

Задача 4 (16 *баллов*). Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y=|a-3|x+1|+x+3|+3|x+1|, \\ 2^{2-y}\log_{\sqrt{3}}\left((x+|a+2x|)^2-6(x+1+|a+2x|)+16\right)+2^{x+|a+2x|}\log_{1/3}(y^2+1)=0, \\ x+|a+2x|\le 3, \end{cases}$$

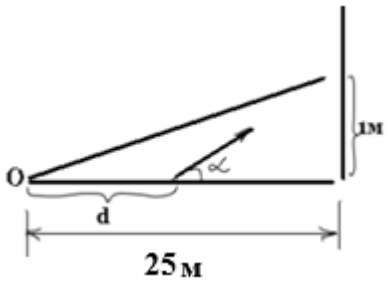
имеет единственное решение $(x; y)$, где x и y – целые числа. Укажите это решение при каждом из найденных a.

Задача 5 (20 *баллов*). Найдите площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью, проходящей через вершину F основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF, если сторона основания пирамиды равна $4\sqrt{7}$, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно $\sqrt{7}$.

Задача 6 (20 *баллов*). Во всем мире популярна игра в хоккей. Многое в игре зависит от вратаря. Для отработки навыков вратарей и обеспечения тренировочного процесса, который бы не зависел от других игроков, создали шайбомет. Автомат можно настроить так, чтобы он выбрасывал шайбы с заданной временной частотой, скоростью и под определенным углом.

Пусть линия ворот находится на расстоянии 25 *м* от центральной точки *O* хоккейной площадки. Автомат установлен на расстоянии d = 16 *м* от точки *O* по направлению к воротам, скорость выброса шайбы равна $V_0 = 20$ м/с. Броски производятся в плоскости, перпендикулярной поверхности льда и линии ворот. При этом для обеспечения безопасности траектория вылетающих шайб должна, с одной стороны, находиться не выше прямой линии, соединяющей центр ледовой площадки *O* с точкой, находящейся в плоскости полета шайб, в плоскости ворот, и на расстоянии одного метра от поверхности льда, а с другой стороны – должна пересекать плоскость ворот по нисходящей ветви траектории.

Определите максимально возможное значение тангенса угла, под которым могут вылетать шайбы из шайбомета, если траектория движения шайбы, рассматриваемой как материальная точка, в плоскости ее полета в системе координат с центром в *O* и осью абсцисс, направленной вдоль поверхности льда, описывается уравнениями: $\begin{cases} x = d + V_0 t \cos\alpha, \\ y = V_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$



Для упрощения вычислений считать, что ускорение свободного падения $g = 10$ *м* / c^2 .

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Профиль: математика

Вариант: 3 Класс: 11

Задача 1 (12 *баллов*). Последовательность Фибоначчи задана рекуррентно $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1},\ n \geq 2$. С каким остатком число 3 в степени a_{2022} делится на 13?

Задача 2 (16 *баллов*). Известно, что графики функций $f(x) = x^p$ и $g(x) = \ln x$ касаются (имеют общую точку, в которой касательные к обоим графикам совпадают). Найдите константу p и точку касания.

Задача 3 (16 *баллов*). Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O, причем $AO : OA_1 = 2 : 1$. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает прямую AB в точке C_1. Найдите угол $B_1A_1C_1$ и длину отрезка A_1C_1, если $AB = 2$, $AC = 4$.

Задача 4 (16 *баллов*). Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\log_{\sqrt{a/10}}\left(\frac{a+8x-x^2}{20}\right) \geq 2$ имеет хотя бы одно решение $x \geq 2$, и каждое такое решение является также решением уравнения $|a+2x-16|+|a-2x+9| = |2a-7|$.

Задача 5 (20 *баллов*). Найдите площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью, проходящей через вершину C основания $ABCDEF$ и параллельной медиане BM боковой грани SAB и апофеме SN боковой грани SAF, если сторона основания пирамиды равна 2, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно 1.

Задача 6 (20 *баллов*). Во всем мире популярна игра в хоккей. Многое в игре зависит от вратаря. Для отработки навыков вратарей и обеспечения тренировочного процесса, который бы не зависел от других игроков, создали шайбомет. Автомат можно настроить так, чтобы он выбрасывал шайбы с заданной временной частотой, скоростью и под определенным углом.

Пусть автомат установлен на льду на расстоянии $l = 12$ *м* от ворот. Броски производятся в плоскости, перпендикулярной поверхности льда и линии ворот, с некоторой фиксированной начальной скоростью выброса шайбы V_0 и под различными углами α к поверхности льда. Примем точку выброса за начало отсчета системы координат. Ось абсцисс направим перпендикулярно центральной линии хоккейной площадки в сторону ворот. Ось ординат – вверх, перпендикулярно поверхности льда. В распоряжении вратаря имеется ловушка для шайб, изображенная на рисунке точкой *M*. Траектория движения шайбы, находящейся в воздухе и рассматриваемой как материальная точка, в зависимости от времени t в указанной системе координат описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x = V_0 t \cos\alpha, \\ y = V_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Определите диапазон возможных значений квадрата начальной скорости выброса шайбы, при каждом из которых шайба попадает в ловушку и максимально возможная высота ловушки в моменты захвата шайбы не превосходит 1 *м*. Для упрощения вычислений считать, что ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.

На этом листе запрещено делать записи и пометки