Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

8 класс

Вариант 1.

1. Найти значение выражения $2a - \left(\frac{2a-3}{a+1} - \frac{a+1}{2-2a} - \frac{a^2+3}{2a^{2-}2}\right) \cdot \frac{a^3+1}{a^2-a} + \frac{2}{a}$ при a=1580.

Решение:

1) $2a - \frac{2(a-1)(2a-3)+(a+1)(a+1)-(a^2+3)}{2(a-1)(a+1)} \cdot \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a} + \frac{2}{a}$

2) $2a - \frac{2(a-1)(2a-3)+(a+1)(a+1)-(a^2+3)}{2(a-1)} \cdot \frac{(a^2-a+1)}{a^2-a} + \frac{2}{a}$

3) $2a - \frac{(-4a+2+2a^2)}{(a-1)} \cdot \frac{(a^2-a+1)}{a \cdot (a-1)} + \frac{2}{a}$

4) $2a - \frac{2(a-1)^2}{(a-1)} \cdot \frac{(a^2-a+1)}{a \cdot (a-1)} + \frac{2}{a}$

5) $2a - \frac{2a^2-2a+2}{a} + \frac{2}{a}$

6) $\frac{2a^2-2a^2+2a-2+2}{a} = \frac{2a}{a}$

Получаем ответ на задачу: $\frac{2a}{a} = 2$

Ответ: 2

2. У прямоугольника сумма двух сторон равна 11, сумма трёх равна 19,5. Найти произведение всех возможных различных значений периметра такого прямоугольника.

Решение:

Пусть стороны прямоугольника равны a и b.

Если сумма соседних сторон равна 11, то можно составить систему, описывающую условие задачи $\begin{cases} a+b=11 \\ 2a+b=19{,}5 \end{cases}$, её решение $a=8{,}5$, $b=2{,}5$, периметр прямоугольника равен $P_1=22$.

Если же числу 11 равна сумма противоположных сторон, то возможны два варианта $\begin{cases} 2a=11 \\ 2a+b=19{,}5 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2a=11 \\ a+2b=19{,}5 \end{cases}$.

Решение первой системы $a=5{,}5$, $b=8{,}5$, периметр прямоугольника равен $P_2=28$.

Решение второй системы $a=5{,}5$, $b=7$, периметр прямоугольника равен

$P_3=25$. Произведение трёх возможных значений периметров равно $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 22 \cdot 28 \cdot 25 = 15400$.

Ответ: 15400.

3. Велосипедист проехал путь от А до В и обратно с некоторой постоянной скоростью. Пешеход прошел путь от А до В со скоростью в 3 раза меньшей скорости велосипедиста, но зато возвращался на автобусе, скорость которого в 5 раз больше скорости велосипедиста. Сколько времени затратил на путь туда и обратно пешеход, если один из них был в пути на 36 мин. дольше другого.

Решение:

$$v_{\text{в}} = x, t_{\text{в}} = \frac{S}{x} + \frac{S}{x} = \frac{2S}{x}$$

$v_n \cdot AB = \frac{x}{3}, v_n \cdot \text{BA} = 5x,$ тогда

$$t_n = \frac{S}{x/3} + \frac{S}{5x} = \frac{3S}{x} + \frac{S}{5x} = \frac{15S + S}{5x} = \frac{16S}{5x}$$

Получим $\frac{16S}{5x} - \frac{2S}{x} = \frac{36}{60}; \frac{6S}{5x} = \frac{3}{5}$, следовательно,

$\frac{S}{x} = \frac{1}{2}$ тогда $t_{\text{в}} = 2 \cdot \frac{S}{x} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ час

$t_n = 1\text{ч.} + \frac{3}{5} = 1{,}6$ ч.

Ответ: 1,6 ч.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах B, C и D равны 30°, 90° и 120° соответственно. Найти длину отрезка AB, если $AD = CD = 2$.

Решение:

Продлим прямые AB и CD до пересечения в точке E, получившийся треугольник ADE равносторонний, значит $ED = EA = 2$, катет $EC = ED + DC = 2 + 2 = 4$, так как он лежит в прямоугольном треугольнике BCE напротив угла 30°, то гипотенуза $BE = 8$, а отрезок $AB = BE - EA = 8 - 2 = 6$.

Ответ: 6.

5. Найти наибольшие значение параметра а, при которых уравнение: $(|x - 2| + 2a)^2 - 3(|x - 2| + 2a) + 4a(3 - 4a) = 0$ имеет три решения.

   В ответе укажите наибольшие из них.

Решение:

Пусть $|x – 2| + 2a = t$, тогда

$t^2 – 3t + 4a\,(3- 4a) = 0$

$t^2 – 2 \cdot \frac{3}{2}t + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + 12a – 16a^2 = 0;$

$(t - \frac{3}{2})^2 – (\frac{9}{4} – 12a + 16a^2) = 0;$

$(t - \frac{3}{2})^2 – (4a - \frac{3}{2})^2 = 0; (t - \frac{3}{2} +4a - \frac{3}{2}) \cdot (t - \frac{3}{2} -4a + \frac{3}{2}) = 0;$

$(t + 4a – 3) \cdot (t – 4a) = 0$

Получим $(|x-2| + 2a + 4a – 3) \cdot (|x-2| + 2a – 4a) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} |x-2| + 6a – 3 = 0 \\ |x-2| - 2a = 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{6} \cdot |x-2| + \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \cdot |x-2| \end{array}\right.$$

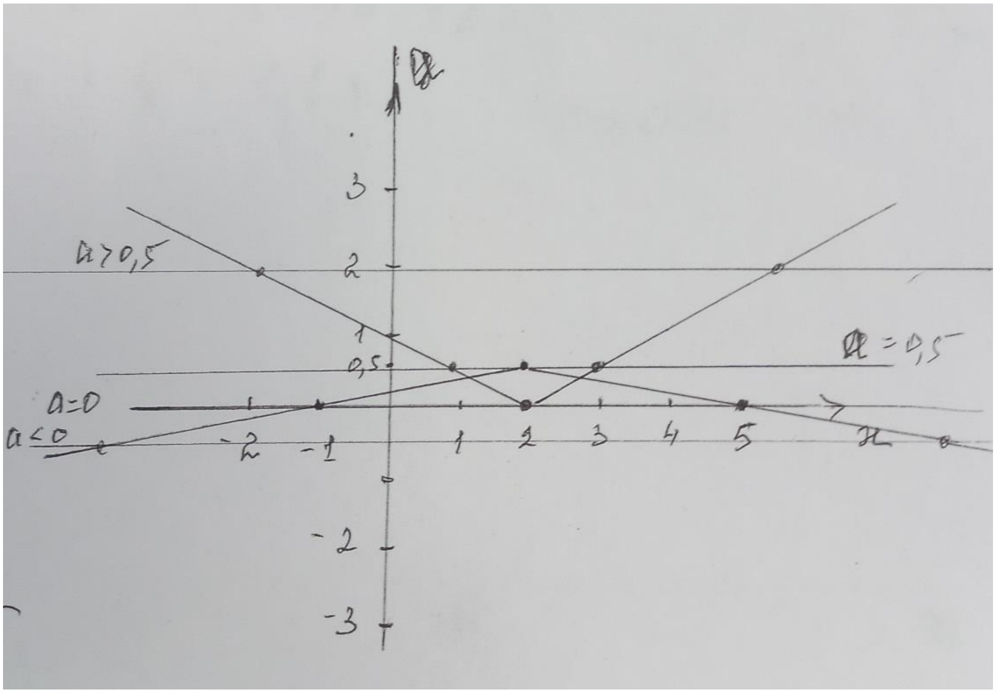
Построим графики уравнений

$a = -\frac{1}{6}\,|x-2| + \frac{1}{2}$ и

$a = \frac{1}{2}\,|x-2|$ в системе XOA

Уравнение имеет три решения при

$a = 0$, $a= 0{,}5$



Ответ: 0,5

6.Тест состоит из вопросов с 4 вариантами ответа, только один ответ на каждый вопрос - правильный. С вероятностью 2/3 Илья знает правильный ответ на вопрос, в противном случае он отмечает случайный вариант ответа. Если на какой-то вопрос Илья дал верный ответ, с какой вероятностью ответ на этот вопрос он отгадал? (Ответ округлите до сотых)

Решение:
Правильный ответ Илья мог получить 2 способами:
1) Если он знал этот ответ, то вероятность была $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$
2) Если он угадывал ответ на этот вопрос, то вероятность была $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

Получаем ответ на задачу: $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{12}} = \frac{1}{9}$

Ответ: 0.11

7. Для приготовления водного раствора кислоты взяли 3л. 30% и 5л. 46% раствора кислоты. Затем часть полученной смеси вылили и добавили такое же количество воды, в результате чего получился 25% раствор кислоты. Сколько литров воды было добавлено.

№ раствора	V раствора (л)	Кислота (л.)	Кислота %
1.	3	3 : 100 · 30 = 0,9	30%
2.	5	5 : 100 · 46 = 2,3	46%
3.	3 + 5 = 8	3,2	$\frac{3{,}2}{8} \cdot 100 = 40\%$
4.	8 – x + x	$3{,}2 - \frac{x}{100} \cdot 40 = 3{,}2 - 0{,}4x$	25%

$3{,}2 - 0{,}4x = \frac{8}{100} \cdot 25$;

$3{,}2 - 0{,}4x = 2$; $0{,}4x = 1{,}2$

$x = 3$

Ответ: 3 л.

8. В остроугольном треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$, $AC = 3$ на медиане AM отметили точку N, так что $\angle BNM = \angle MAC$. Найти длину отрезка BN.

Решение:

Сделаем дополнительное построение, удвоим медиану AM за точку M, тем самым получим точку K, такую что $K \in AM$, $KM = AM$. Треугольники KMB

и AMC равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно равны соответствующие стороны и углы: $BK = AC = 3$, $\angle MKB = \angle MAC$. Тогда получаем, что треугольник KBN равнобедренный $\angle BNM = \angle BKN$ и $BN = BK = 3$.

Ответ: 3.

9. Решить уравнение $a^2 + 2 = b!$, при условии, что a, b принадлежит N. В ответе указать сумму произведения всех возможных a и произведения всех возможных b (если уравнение не имеет решений, в ответе укажите 0, если бесконечно много решений, укажите 1000).

Решение:

$b! - 2 = a^2;\ x, y \in N$

$a \geq 1$, т.е. $a^2 \geq 1 \Rightarrow b! \geq 3$, т.е. $b \geq 3$

Если $x \geq 5$, то $x!$ оканчивается на 0, тогда y^2 оканчивается на 8, но нет такого числа, квадрат, которого оканчивается на 8, т.е. $x < 5$.

Получается:

$\left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2=4 \\ a^2=22 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-2, \notin N \\ a=\pm\sqrt{22}, \notin N \end{array}\right.$, т.е. $b = 3, a = 2$.

Получаем ответ на задачу: $a + b = 2 + 3 = 5$

Ответ: 5