

9-й класс

№1: Комбинаторика.

Тест состоит из вопросов с 4 вариантами ответа, только один ответ на каждый вопрос - правильный. С вероятностью $\frac{2}{3}$ Илья знает правильный ответ на вопрос, в противном случае он отмечает случайный вариант ответа. Если на какой-то вопрос Илья дал верный ответ, с какой вероятностью ответ на этот вопрос он отгадал? (Ответ округлите до сотых)

Решение:

Правильный ответ Илья мог получить 2 способами:

1) Если он знал этот ответ, то вероятность была $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

2) Если он угадывал ответ на этот вопрос, то вероятность была $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

Получаем ответ на задачу: $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{9}$

Ответ: 0.11

№2: Параметр.

2. Найти наибольшее значение параметра a , при которых уравнение:

$$(|x - 2| + 2a)^2 - 3(|x - 2| + 2a) + 4a(3 - 4a) = 0$$
 имеет три решения.

В ответе укажите наибольшее из них.

Решение:

Пусть $|x - 2| + 2a = t$, тогда

$$t^2 - 3t + 4a(3 - 4a) = 0$$

$$t^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}t + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + 12a - 16a^2 = 0;$$

$$(t - \frac{3}{2})^2 - (\frac{9}{4} - 12a + 16a^2) = 0;$$

$$(t - \frac{3}{2})^2 - (4a - \frac{3}{2})^2 = 0; (t - \frac{3}{2} + 4a - \frac{3}{2}) \cdot (t - \frac{3}{2} - 4a + \frac{3}{2}) = 0;$$

$$(t + 4a - 3) \cdot (t - 4a) = 0$$

Получим $(|x - 2| + 2a + 4a - 3) \cdot (|x - 2| + 2a - 4a) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} |x - 2| + 6a - 3 = 0 \\ |x - 2| - 2a = 0; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{6} \cdot |x - 2| + \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \cdot |x - 2| \end{array} \right.$$

Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

Построим графики уравнений

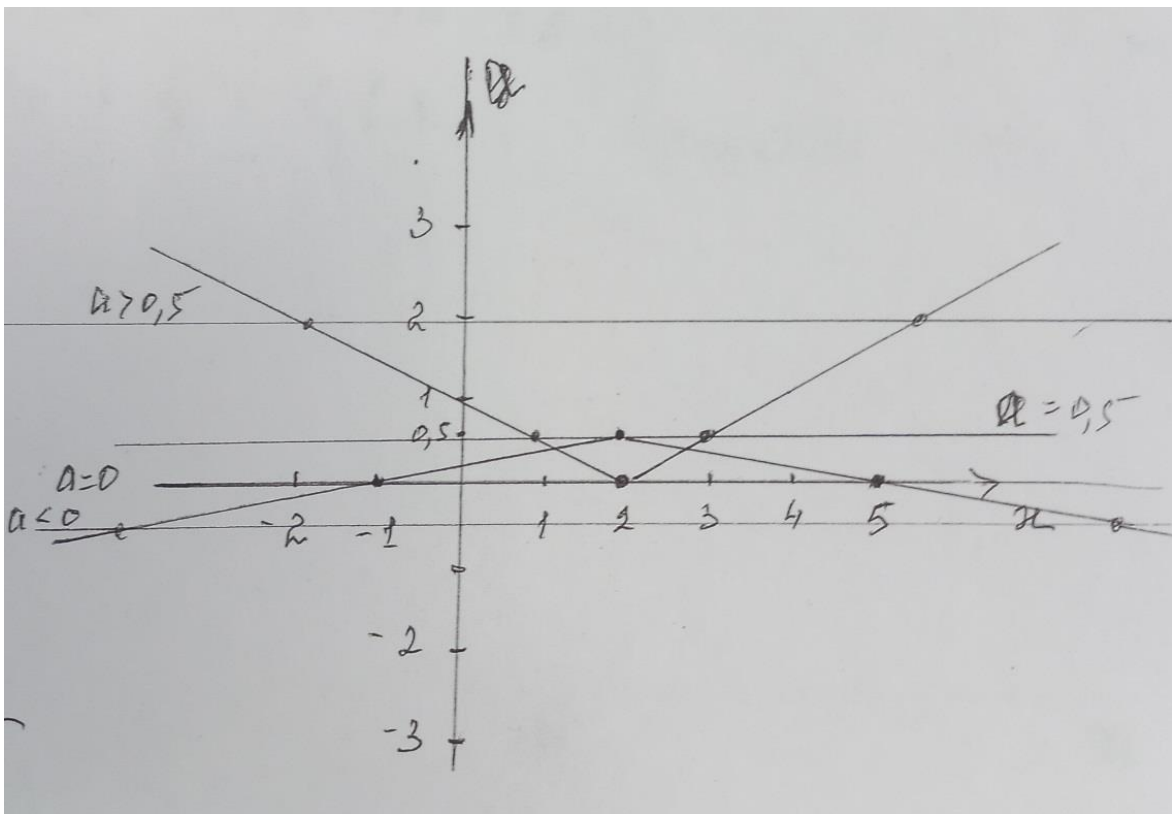
$$a = -\frac{1}{6} |x-2| + \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$a = \frac{1}{2} |x-2| \text{ в системе ХОА}$$

Уравнение имеет три решения при

$$a = 0, a = 0,5$$

Ответ: 0,5



№3: Треугольники.

В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках P, Q и R. Найдите площадь треугольника PQR, если длины катетов треугольника ABC равны 3 и 4.

Ответ: 1,2

№4: Свойства чисел.

1. Определите какое наименьшее значение может принимать НОК четырёх натуральных чисел, если их сумма равна 2023. **ответ: 578.**

решение. Так как $2023=7\cdot 17\cdot 17$, то подбираем самый удобный вариант. Пусть $x\leq y\leq k\leq e$ - натуральные числа, сумма которых равна 2023, и $P=\text{НОК}(x; y; k; e)$. Заметим, что все числа равными быть не могут, так как 2023 не делится на 4.

1. Так как $x\leq P$ и $P:x$, то пусть $2x\leq P \Rightarrow x\leq P/2$, а также $y\leq P; k\leq P; e\leq P; \Rightarrow$

$$x+y+k+e\leq 3,5P; \Rightarrow P\geq \frac{2}{7}(x+y+k+e)=\frac{2}{7}\cdot 2023=578.$$

$x=289; 2x=y=k=e=578. x+y+k+e=2023. P=578.$ **ответ: 578.**

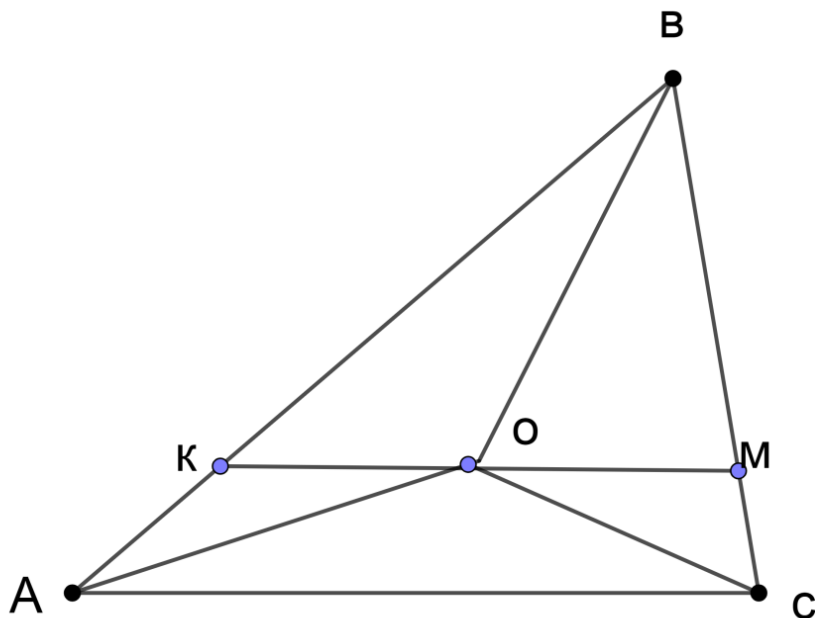
№5: Проценты.

Из бутылки, наполненной 12%-ным раствором соли, отлили 1 л и долили бутылку водой, затем отлили ещё 1 л и опять долили водой. В бутылке оказался 3%-ный раствор соли. Какова вместимость бутылки? **Ответ: 2 л**

№6: Планиметрия.

1. Через O точку пересечения биссектрис треугольника ABC , провели прямую KM параллельно стороне AC (K лежит на AB , M лежит на BC). Найдите длину отрезка KM , если площадь четырёхугольника $AKMC$ составляет $11/36$ площади треугольника ABC , а разность периметров треугольников ABC и KBM равна 18. **ответ:15.**

решение.



1. Из треугольника АКО: $AK=KO$.

Из треугольника СМО: $MC=MO$.

2. $P_{ABC}=AB+BC+AC$.

$P_{KBM}=KB+KO+OM+BM=AB+BC$.

$P_{ABC} - P_{KBM}=AC=18$.

3. $S_{AKMC} : S_{FDC}=11:36$ следовательно $S_{KMB} : S_{ABC}=25:36$ следовательно $KM:AC=5:6$. $KM=15$.

ответ: 15.

№7: Теория чисел.

Решить уравнение $a^2 + 2 = b!$, при условии, что a, b принадлежит \mathbb{N} . В ответе указать сумму произведения всех возможных a и произведения всех возможных b

Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

(если уравнение не имеет решений, в ответе укажите 0, если бесконечно много решений, укажите 1000).

Решение:

$$b! - 2 = a^2; x, y \in \mathbb{N}$$

$$a \geq 1, \text{ т.е. } a^2 \geq 1 \Rightarrow b! \geq 3, \text{ т.е. } b \geq 3$$

Если $x \geq 5$, то $x!$ оканчивается на 0, тогда y^2 оканчивается на 8, но нет такого числа, квадрат, которого оканчивается на 8, т.е. $x < 5$.

Получается:

$$\begin{cases} b=3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=4 \\ a^2=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=-2, \notin \mathbb{N} \\ a=\pm\sqrt{22}, \notin \mathbb{N} \end{cases}, \text{ т.е. } b = 3, a = 2.$$

Получаем ответ на задачу: $a + b = 2 + 3 = 5$

Ответ: 5

№8: Параметр.

1. Найдите пару натуральных чисел x и a , удовлетворяющих условию $x^2 + 2x + 21 = a^2$. В ответ выпишите их сумму. **ответ:** 9.

$$\text{решение. } x^2 + 2x + 21 = a^2 \Rightarrow (x^2 + 2x + 1) + 20 = a^2 \Rightarrow a^2 - (x+1)^2 = 20 \Rightarrow (a-x-1)(a+x+1) = 20 \Rightarrow$$

Так как $20 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, то решения последнего уравнения будем искать, как решения соответствующих систем уравнений (достаточно рассмотреть лишь произведение двух чётных целых чисел): $\begin{cases} a - x - 1 = 2; \\ a + x + 1 = 10 \end{cases}$

$$\begin{cases} a - x - 1 = 10; \\ a + x + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - x - 1 = -2; \\ a + x + 1 = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - x - 1 = -10; \\ a + x + 1 = -2 \end{cases}$$

Решением данных систем, а значит и соответствующего уравнения будут пары –

$(a; x)$: $(6; 3)$; $(6; -5)$; $(-6; -5)$; $(-6; 3)$. Пара натуральных чисел x и a , удовлетворяющих условию $(6; 3)$. **ответ:** 9.

Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

№9: Делимость.

Известно, что арифметическая прогрессия состоит из целых чисел, разность прогрессии равна 7 и сумма первых нескольких членов прогрессии равна 2744. Найдите все возможные значения первого члена прогрессии. В ответ запишите их сумму.

Ответ. –20372.

Решение.

Пусть a – первый член арифметической прогрессии, тогда сумма n первых членов арифметической прогрессии равна

$$\frac{2a + d(n - 1)}{2}n = 2744,$$

$$(2a + 7(n - 1))n = 2 \cdot 2744 = 2^4 \cdot 7^3.$$

Если n – четно, то $2a + 7(n - 1)$ – нечетно, поэтому $n = 16k$, где k – натуральный делитель числа 7^3 . Возможные значения k : 1, 7, 7^2 , 7^3 . Найдём возможные значения a .

Если $k = 1$, то $n = 16$ и $a = 119$.

Если $k = 7$, то $n = 16 \cdot 7$ и $a = -364$.

Если $k = 7^2$, то $n = 16 \cdot 7^2 = 784$ и $a = -2737$.

Если $k = 7^3$, то $n = 16 \cdot 7^3 = 5488$ и $a = -19204$.

Если n – нечетно, то $2a + 7(n - 1)$ – четно, поэтому $n = p$, где p – натуральный делитель числа 7^3 . Возможные значения p : 1, 7, 7^2 , 7^3 . Найдём возможные значения a .

Если $p = n = 1$, то $a = 2744$.

Если $p = n = 7$, то $a = 371$.

Если $p = n = 7^2$, то $a = -112$.

Если $p = n = 7^3$, то $a = -1189$.

Сумма всех возможных значений a равна:

$$119 - 364 - 2737 - 19204 + 2744 + 371 - 112 - 1189 = -20372.$$

Ответ. –20372.