Решение варианта №1 (Математика - 10 класс)

1. Имеется шесть карточек с буквами С, О, Б, А, К, И. Сколькими способами можно расположить все карточки в ряд так, чтобы не было трех согласных подряд и не было трех гласных подряд? (12 баллов)

Решение. Должны чередоваться блоки из 1–2 гласных и 1–2 согласных. Временно обозначим гласные А, согласные Б. Количество блоков гласных 2 или 3, блоков согласных 2 или 3, и чтобы чередование было возможным, эти количества не должны различаться более чем на 1.

Разбиения гласных на блоки могут быть такими: 1) А-АА, 2) АА-А, 3) А-А-А.

Разбиения согласных на блоки: Б-ББ, ББ-Б, Б-Б-Б.

Пересчитаем способы чередования этих блоков.

1) БАББАА, ББАБАА, АБААББ, АББААБ, БАБААБ;

2) БААББА, ББААБА, ААБАББ, ААББАБ, БААБАБ;

3) АБАББА, АББАБА, БАБАБА, АБАБАБ.

В каждой из этих 14 конфигураций надо заменить три А на три разные гласные буквы ($3! = 6$ способов) и заменить три Б на три разные согласные буквы (так же 6 способов), в итоге 14 умножится на 36.

Ответ: 504.

2. Пусть x, y, z – корни многочлена $P(t) = t^3 - 3t - 1$. Найдите $x^7 + y^7 + z^7$. (16 баллов)

Решение. Многочлен имеет 3 разных действительных корня, поскольку $P(-10) < 0$, $P(-1) > 0$, $P(0) < 0$, $P(10) > 0$. Выразим 7-ю степень его корня через меньшие степени:

$$x^7 = x(x^3)^2 = x(3x+1)^2 = 9x^3 + 6x^2 + x = 9(3x+1) + 6x^2 + x = 6x^2 + 28x + 9.$$

Из теоремы Виета получаем $x+y+z = 0$; $x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+xz+yz) = -2\cdot(-3) = 6$. В итоге

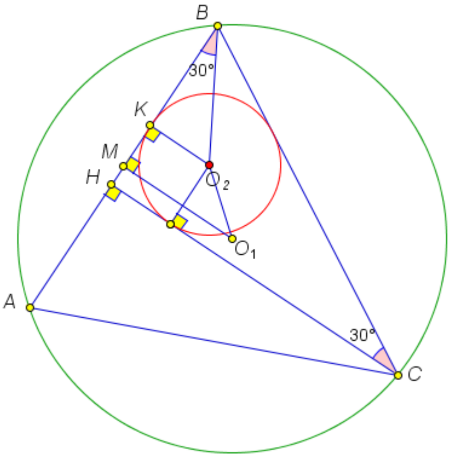
$$x^7 + y^7 + z^7 = 6 \cdot 6 + 28 \cdot 0 + 3 \cdot 9 = 63.$$

Ответ: 63.

3. В треугольнике ABC угол B равен $60°$, отрезок CH - высота. Окружность с центром в точке O_1 и радиусом $R=\frac{\sqrt{39}}{3}$ описана около треугольника ABC. В треугольник BCH вписана окружность с центром в точке O_2 и радиусом $r=\sqrt{3}-1$. Найдите длину O_1O_2. (16 баллов)

Решение. 1) Пусть $BH=x$. В прямоугольном треугольнике BCH имеем:

$BH=x, BC=2x, CH=\sqrt{3}x$. Тогда $r=\frac{x+\sqrt{3}x-2x}{2}$, $2r=\left(\sqrt{3}-1\right)x, x=2, \quad BC=4, CH=2\sqrt{3}$.



2) $AC=2R\sin 60°=\frac{\sqrt{39}}{3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{13}$,

$AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=\sqrt{13-12}=1$,

1 случай: треугольник ABC - остроугольный $AB=3$.

3) Проведем $O_2K\perp AB, K\in AB$. В прямоугольном треугольнике BO_2K угол KBO_2 равен $30°$, $O_2K=r, BO_2=2r, BK=\sqrt{3}r=3-\sqrt{3}$. Пусть М – середина AB. Тогда $O_2K\,||\,O_1M$, $BM=1{,}5, \quad MK=\sqrt{3}-1{,}5$.

4) $MO_1=\sqrt{BO_1^{\,2}-BM^{\,2}}=\sqrt{R^2-9/4}=\frac{5}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

5) $O_1O_2^{\,2}=\left(MO_1-r\right)^2+MK^2=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(\sqrt{3}-1{,}5\right)^2=\frac{19-10\sqrt{3}}{3}$. $O_1O_2=\sqrt{\frac{19-10\sqrt{3}}{3}}$.

2 случай: треугольник ABC - тупоугольный $AB=1$.

3) Проведем $O_2K\perp BH, K\in BH$. В прямоугольном треугольнике BO_2K угол KBO_2 равен $30°$, $O_2K=r, BO_2=2r, BK=\sqrt{3}r=3-\sqrt{3}$. Пусть М – середина AB. Тогда $O_2K\,||\,O_1M$, $BM=0{,}5, \quad MK=2{,}5-\sqrt{3}$.

4) $MO_1=\sqrt{BO_1^{\,2}-BM^{\,2}}=\sqrt{R^2-1/4}=\frac{7}{2\sqrt{3}}$.

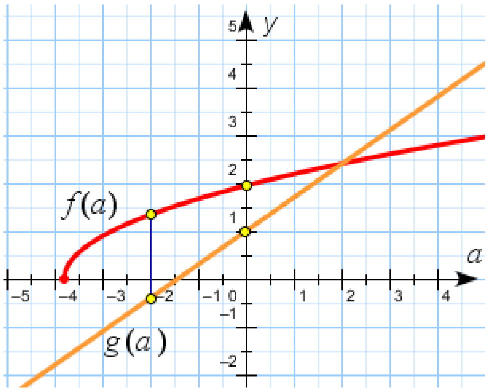
5) $O_1O_2^{\,2}=\left(MO_1-r\right)^2+MK^2=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(2{,}5-\sqrt{3}\right)^2=\frac{31-14\sqrt{3}}{3}$. $O_1O_2=\sqrt{\frac{31-14\sqrt{3}}{3}}$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{19-10\sqrt{3}}{3}},\ \sqrt{\dfrac{31-14\sqrt{3}}{3}}.$

4. Найдите все значения x, для которых неравенство $\sqrt{2x^2+8x+a}>ax^2+(1-a)(2x-1)-15$ верно для любого $a\in[-2;0]$. (16 баллов)

Решение: $\sqrt{2x^2+8x+a}>ax^2+(1-a)(2x-1)-15$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+8x+a}>a(x-1)^2+2x-16 \quad (*)$



Пусть для некоторого фиксированного значения x неравенство (*) выполняется для всех $a\in[-2;0]$. Рассмотрим функции $f(a)=\sqrt{2x^2+8x+a}$ и $g(a)=a(x-1)^2+2x-16$. Область определения $f(a)$ - множество, удовлетворяющее неравенству $2x^2+8x+a\ge 0$. Выбранное значение x удовлетворяет неравенству $2x^2+8x+a\ge 0$ при любых $a\in[-2;0]$, значит, $2x^2+8x-2\ge 0$. При $a\in[-2;0]$ функция $f(a)$ возрастает, и $f(a)\ge 0$. Графиком функции $f(a)$ является ветвь параболы. Функция $g(a)$ - неубывающая линейная функция, и $g(-2)=-2x^2+6x-18<0$ для любого $x\in\mathbb{R}$.

Для выполнения неравенства (*) для всех $a\in[-2;0]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases}2x^2+8x-2\ge 0,\\ f(0)>g(0),\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x-1\ge 0,\\ \sqrt{2x^2+8x}>2x-16,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\infty;-2-\sqrt{5}\right]\cup\left[2+\sqrt{5};+\infty\right),\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x(x+4)\ge 0,\\ x<8,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 8,\\ 2x^2+8x>4x^2-64x+256,\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\in\left(-\infty;-2-\sqrt{5}\right]\cup\left[2+\sqrt{5};+\infty\right),\\ \left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-4]\cup[0;8),\\ \begin{cases}x\ge 8,\\ x^2-36x+128<0,\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\infty;-2-\sqrt{5}\right]\cup\left[2+\sqrt{5};+\infty\right),\\ \left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-4]\cup[0;8),\\ x\in[8;32),\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$x\in\left(-\infty;-2-\sqrt{5}\right]\cup\left[2+\sqrt{5};32\right).$

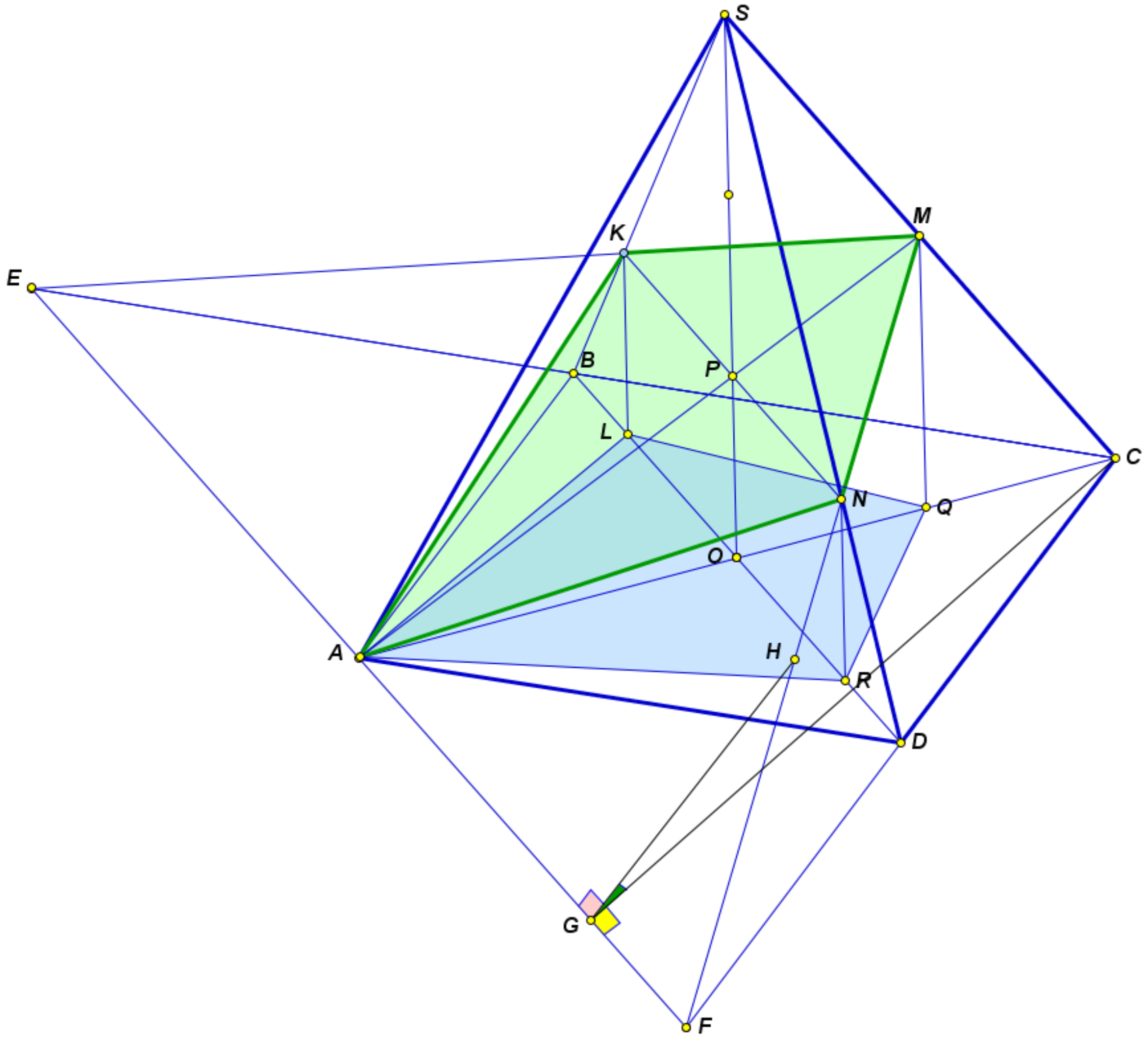
Ответ: $x\in\left(-\infty;-2-\sqrt{5}\right]\cup\left[2+\sqrt{5};32\right).$

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB=\sqrt{7}$, $BC=3\sqrt{7}$ и углом A, равным $60°$. Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной диагонали основания BD и проходящей через середину ребра SC и точку P, лежащую на высоте пирамиды SO, причем $SP=2PO$, если расстояние от точки S до плоскости сечения равно $3\sqrt{3}/2$. (20 баллов)

Решение. Построим сечение пирамиды. Пусть $P \in SO$, $SP = 2SO$, а M – середина SC. Отрезки AM и SO являются медианами треугольника ASC, они пересекаются в точке P. Следовательно, сечение проходит через точку A. В плоскости BSD через точку P проведем прямую KN, параллельную BD, $K \in BS$, $N \in SD$, $\frac{SK}{KB} = \frac{SN}{ND} = 2$. Искомое сечение – четырехугольник $AKMN$.

Обозначим $AB = a$, $AD = 3a$, $\angle A = \alpha$, $a = \sqrt{7}$, $\alpha = 60°$.

Площадь сечения $AKMN$ будем вычислять по формуле $S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi}$, где $S_{пр}$ - площадь проекции сечения на плоскость основания, φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания. Проекцией является четырехугольник $ALQR$. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S = AB \cdot AD \sin\alpha = 3a^2 \sin\alpha$, $S = 21\sqrt{3}/2$.



Площадь проекции сечения вычисляется по формуле

$$S_{пр} = 2(S_{AOR} + S_{ROQ}) = \frac{S}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{S}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4}.$$

Плоскость сечения и плоскость основания пересекаются по прямой EF, параллельной BD и проходящей через точку A. Пусть CG – перпендикуляр к прямой EF, $H \in MF$, $HG \perp EF$. Угол CGH – угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, он равен φ.

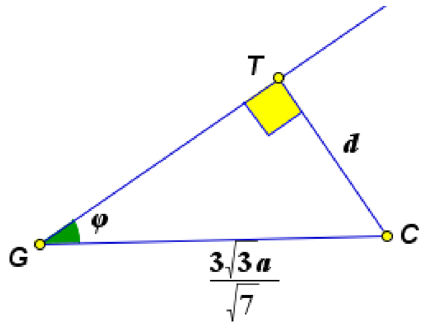
Расстояние от точки S до плоскости сечения равно расстоянию от точки C до плоскости сечения и равно $d = 3\sqrt{3}/2$.

Отрезок CG – высота треугольника ECF, $EF \cdot CG = EC \cdot CF \sin\alpha$,

$$CG = \frac{EC \cdot CF \sin\alpha}{EF} = \frac{2BC \cdot 2CD \sin 60^\circ}{\sqrt{4BC^2 + 4CD^2 - 2 \cdot 4BC \cdot CD \cos 60^\circ}} = \frac{BC \cdot CD\sqrt{3}}{\sqrt{BC^2 + CD^2 - BC \cdot CD}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}a.$$

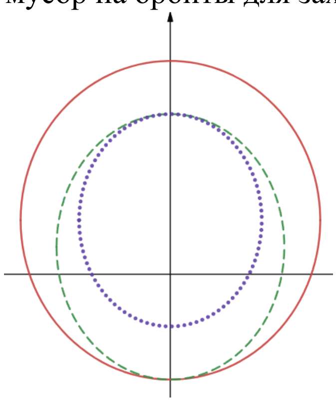
Проведем перпендикуляр CT к прямой GH, длина этого перпендикуляра равна d. Тогда $\sin\varphi = \frac{CT}{CG} = \frac{d\sqrt{7}}{3\sqrt{3}a} = \frac{1}{2}$, $\varphi = 30^\circ$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi} = \frac{21}{2} = 10,5.$$



Ответ: $10,5$.

6. За время освоения космического пространства на различных орбитах скопились сотни тысяч объектов космического мусора. Дальнейшее использование космического пространства может быть существенно осложнено возрастающей угрозой столкновения с этим мусором. Согласно результатам исследований удаление 3-5 крупных объектов в год с низких околоземных орбит позволяет предотвратить цепную реакцию роста объектов космического мусора в будущем. На данный момент работающей технологией по утилизации космического мусора является увод старых спутников. Это можно сделать с помощью аппаратов-захватчиков, которые буксируют мусор на орбиты для захоронения.



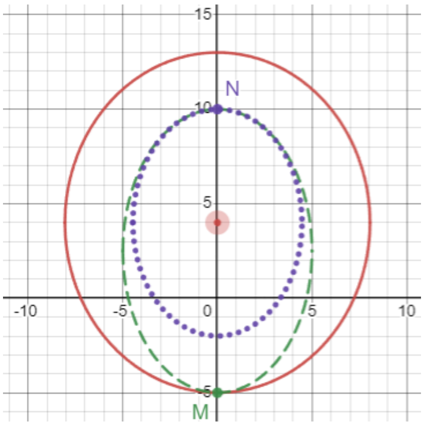
Рассмотрим плоскость орбиты захоронения. Пусть крупный фрагмент мусора движется в этой плоскости по эллиптической орбите с большой полуосью, равной 9000 *км*. (Для удобства вычислений все расчеты будем производить в тысячах километров.) Пусть уравнение траектории движения обломка задано следующим образом: $81x^2 + 65(y-4)^2 = 5265$.

На некотором удалении от указанной орбиты находится космическая научная станция, уравнение движения которой $36x^2 + 20(y-4)^2 = 720$. С нее стартует летательный аппарат, который движется по переходной эллиптической траектории: $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-y_0)^2}{z^2} = 1$. Он должен совершить маневр по переходу с одной орбиты на другую и плавно подойти к обломку для изменения его скорости и направления движения.

Известно, что скорость движения по эллиптической орбите вида $\frac{x^2}{b^2}+\frac{(y-c)^2}{a^2}=1,\quad a\geq b,\ c=\sqrt{a^2-b^2}$, с большой полуосью, равной a, вычисляется по формуле $V=\sqrt{\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)},\ \mu\approx 3,9\cdot 10^5\,км^3/c^2$ -гравитационный потенциал Земли, r – расстояние от начала координат, расположенного в одном из фокусов эллипса, до движущейся точки.

Найдите максимальную скорость движения осколков космического мусора на указанной орбите. Определите параметры $z,\ y_0$, если известно, что переходная траектория должна проходить через точку, в которой скорость движения обломков максимальна и проходить через точку орбиты научной станции, в которой скорость движения станции минимальна. Выпишите уравнение переходной орбиты. (20 баллов)

Решение. Анализируя формулу скорости, можно заметить, что минимальное значение скорости движения по эллиптической орбите достигается в вершине эллипса, наиболее удаленной от фокуса, в котором находится начало координат, а максимальное – в ближайшей к фокусу вершине. Поэтому переходная траектория должна проходить через точки M(0, -5) и N(0, 10).



Для нахождения скорости рассмотрим точку M

$$M(0,-5)\Rightarrow\ V=\sqrt{\mu\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{9}\right)}=\sqrt{3,9\cdot 10^5\left(\frac{13}{3\cdot 15\cdot 1000}\right)}\approx\sqrt{\frac{13^2\cdot 10}{15}}=\frac{\sqrt{2}\cdot 13}{\sqrt{3}}\approx 10,6\frac{км}{c}.$$

Здесь мы учли, что расчёты делали в тысячах километров.

Для нахождения переходной траектории учтем симметрию эллипса, положим $x=0\ \Rightarrow\ y-y_0=\pm z\quad\Rightarrow y=y_0-z=-5,\ y=y_0+z=10\quad\Rightarrow\ y_0=\frac{10-5}{2}=\frac{5}{2},\ z=\frac{15}{2}$

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{(y-5/2)^2}{(15/2)^2}=1\quad .$$

Ответ: 10,6; 7,5; 2,5; $\frac{x^2}{5^2}+\frac{(y-5/2)^2}{(15/2)^2}=1$

Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика
Предмет: Математика
Класс: 10

Задание 1 (максимальная оценка 12 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	3
Задание решено на 50%	6
Задание решено на 75%	9
Задание решено на 100%	12

Задание 2 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 3 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 4 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	5
Задание решено на 50%	10
Задание решено на 75%	15
Задание решено на 100%	20

Задание 6 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	5
Задание решено на 50%	10
Задание решено на 75%	15
Задание решено на 100%	20

Решение варианта №2 (Математика - 10 класс)

1. Имеется семь карточек с буквами С, О, Б, А, Ч, К, И. Сколькими способами можно расположить все карточки в ряд так, чтобы не было трех согласных подряд и не было двух гласных подряд? (12 баллов)

Решение. Должны чередоваться гласные буквы и блоки из 1–2 согласных. Временно обозначим гласные А, согласные Б. Количество гласных букв 3, блоков согласных 2, 3 или 4, и чтобы чередование было возможным, эти количества не должны различаться более чем на 1.

Разбиения согласных на блоки: 1) ББ-ББ, 2) ББ-Б-Б, 3) Б-ББ-Б, 4) Б-Б-ББ, 5) Б-Б-Б-Б. Пересчитаем способы чередования гласных букв и этих блоков.

1) АББАББА,
2) АББАБАБ, ББАБАБА,
3) АБАББАБ, БАББАБА,
4) АБАБАББ, БАБАББА,
5) БАБАБАБ.

В каждой из этих 8 конфигураций надо заменить три А на три разные гласные буквы ($3! = 6$ способов) и заменить четыре Б на разные согласные буквы ($4! = 24$ способа), в итоге 8 умножится на 144.

Ответ: 1152.

2. Пусть x, y, z – корни многочлена $P(t) = t^3 - 4t + 2$. Найдите $x^7 + y^7 + z^7$. (16 баллов)

Решение. Многочлен имеет 3 разных действительных корня, поскольку $P(-10) < 0$, $P(0) > 0$, $P(1) < 0$, $P(10) > 0$. Выразим 7-ю степень его корня через меньшие степени:

$$x^7 = x(x^3)^2 = x(4x-2)^2 = 16x^3 - 16x^2 + 4x = 16(4x-2) - 16x^2 + 4x = -16x^2 + 68x - 32.$$

Из теоремы Виета получаем $x+y+z = 0$; $x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+xz+yz) = -2\cdot(-4) = 8$. В итоге

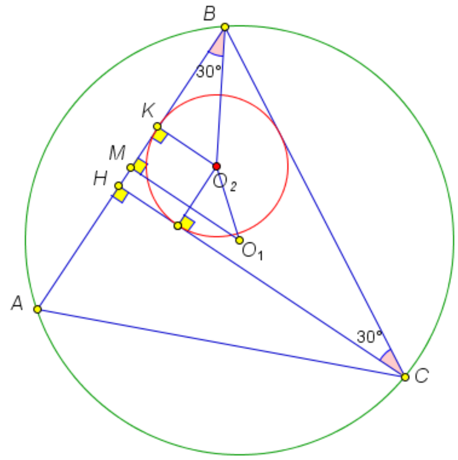
$$x^7 + y^7 + z^7 = -16 \cdot 8 + 68 \cdot 0 + 3(-32) = -224.$$

Ответ: -224.

3. В треугольнике ABC угол B равен $60°$, отрезок CH - высота. Окружность с центром в точке O_1 и радиусом $R=\sqrt{13}$ описана около треугольника ABC. В треугольник BCH вписана окружность с центром в точке O_2 и радиусом $r=3-\sqrt{3}$. Найдите длину O_1O_2. (16 баллов)

Решение. 1) Пусть $BH=x$. В прямоугольном треугольнике BCH имеем: $BH=x,\ BC=2x,\ CH=\sqrt{3}x.$

Тогда $r=\dfrac{x+\sqrt{3}x-2x}{2},\ 2r=\left(\sqrt{3}-1\right)x,\ x=2\sqrt{3},\quad BC=4\sqrt{3},\ CH=6.$



2) $AC=2R\sin 60°=\sqrt{13}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{39}.$

$AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=\sqrt{39-36}=\sqrt{3}.$

1 случай: треугольник ABC - остроугольный

$AB=3\sqrt{3}.$

3) Проведем $O_2K\perp AB,\ K\in AB.$ В прямоугольном треугольнике BO_2K угол KBO_2 равен $30°$, $O_2K=r,\ BO_2=2r,\ BK=\sqrt{3}r=3\sqrt{3}-3.$ Пусть М – середина AB. Тогда $O_2K\parallel O_1M$,

$BM=1{,}5\sqrt{3},\quad MK=3-1{,}5\sqrt{3}.$

4) $MO_1=\sqrt{BO_1^2-BM^2}=\sqrt{R^2-27/4}=\dfrac{5}{2}.$

5) $O_1O_2^{\,2}=\left(MO_1-r\right)^2+MK^2=\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(3-1{,}5\sqrt{3}\right)^2=19-10\sqrt{3}.\ O_1O_2=\sqrt{19-10\sqrt{3}}.$

2 случай: треугольник ABC - тупоугольный $AB=\sqrt{3}.$

3) Проведем $O_2K\perp BH,\ K\in BH.$ В прямоугольном треугольнике BO_2K угол KBO_2 равен $30°,\ O_2K=r,\ BO_2=2r,\ BK=\sqrt{3}r=3\sqrt{3}-3.$ Пусть М – середина AB. Тогда $O_2K\parallel O_1M$,

$BM=0{,}5\sqrt{3},\quad MK=2{,}5\sqrt{3}-3.$

4) $MO_1=\sqrt{BO_1^2-BM^2}=\sqrt{R^2-3/4}=\dfrac{7}{2}.$

5) $O_1O_2^{\,2}=\left(MO_1-r\right)^2+MK^2=\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(2{,}5\sqrt{3}-3\right)^2=31-14\sqrt{3}.\ O_1O_2=\sqrt{31-14\sqrt{3}}.$

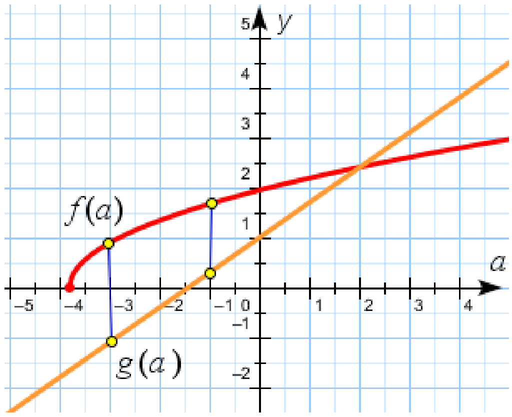
Ответ: $\sqrt{19-10\sqrt{3}}, \sqrt{31-14\sqrt{3}}.$

4. Найдите все значения x, для которых неравенство
$\sqrt{2(x+2)^2+8x+a-7}>(a+1)x^2+a(2x-1)-15$ верно для любого $a\in[-3;-1]$.

(16 баллов)

Решение: $\sqrt{2x^2+16x+a+1}>(a+1)x^2+a(2x-1)-15$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+16x+a+1}>a\left((x+1)^2-2\right)+x^2-15 \quad (*)$



Пусть для некоторого фиксированного значения x неравенство (*) выполняется для всех $a\in[-3;-1]$. Рассмотрим функции $f(a)=\sqrt{2x^2+16x+a+1}$ и $g(a)=a\left((x+1)^2-2\right)+x^2-15$. Область определения $f(a)$ - множество, удовлетворяющее неравенству $2x^2+16x+a+1\geq 0.$ Выбранное значение x удовлетворяет неравенству $2x^2+16x+a+1\geq 0$ при любых $a\in[-3;-1]$, значит, $2x^2+16x-2\geq 0.$ При $a\in[-3;-1]$ функция $f(a)$ возрастает, и $f(a)\geq 0.$ Графиком функции $f(a)$ является ветвь параболы. Функция $g(a)$ - линейная функция, и $g(-3)=-2x^2-6x-12<0$ для любого $x\in\mathbb{R}$.

Для выполнения неравенства (*) для всех $a\in[-3;-1]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2+16x-2\geq 0, \\ f(-1)>g(-1), \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+8x-1\geq 0, \\ \sqrt{2x^2+16x}>-2x-14, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\in\left(-\infty;-4-\sqrt{17}\right]\cup\left[-4+\sqrt{17};+\infty\right), \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x(x+8)\geq 0, \\ x>-7, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x\leq -7, \\ 2x^2+16x>4x^2+56x+196, \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x\in\left(-\infty;-4-\sqrt{17}\right]\cup\left[-4+\sqrt{17};+\infty\right), \\ \left[\begin{array}{l} x\in[0;+\infty), \\ \left\{\begin{array}{l} x\leq -7, \\ x^2+20x+98<0, \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\in\left(-\infty;-4-\sqrt{17}\right]\cup\left[-4+\sqrt{17};+\infty\right), \\ \left[\begin{array}{l} x\in[0;+\infty), \\ x\in\left(-10-\sqrt{2};-10+\sqrt{2}\right), \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x\in\left(-10-\sqrt{2};-10+\sqrt{2}\right)\cup\left[-4+\sqrt{17};+\infty\right).$

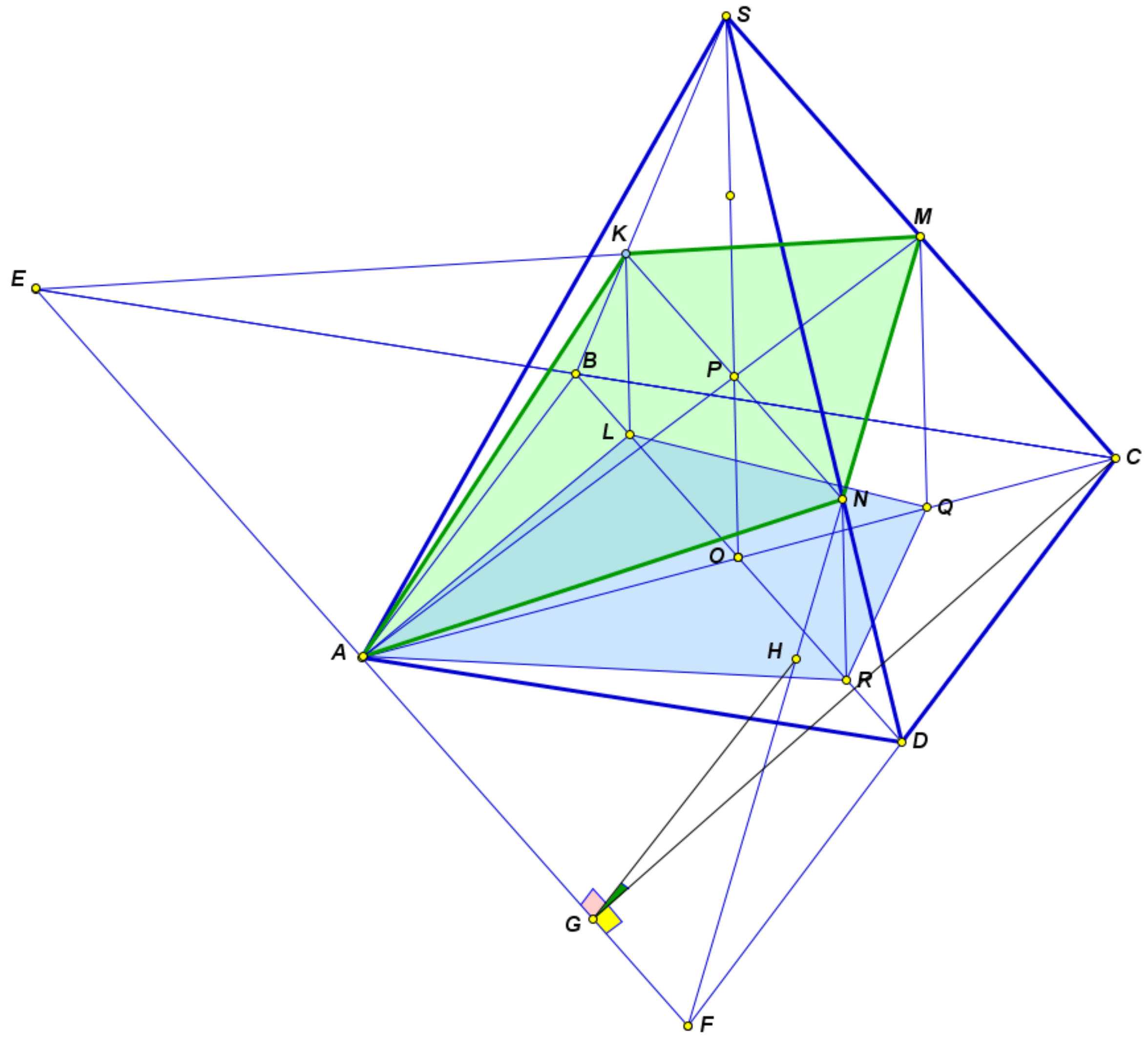
Ответ: $x\in\left(-10-\sqrt{2};-10+\sqrt{2}\right)\cup\left[-4+\sqrt{17};+\infty\right).$

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB=\sqrt{13}$, $BC=4\sqrt{13}$ и углом A, равным $60°$. Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной диагонали основания BD и проходящей через середину ребра SC и точку P, лежащую на высоте пирамиды SO, причем $SP=2PO$, если расстояние от точки S до плоскости сечения равно $2\sqrt{3}$. (20 баллов)

Решение. Построим сечение пирамиды. Пусть $P \in SO,\ SP = 2SO,$ а M – середина SC. Отрезки AM и SO являются медианами треугольника ASC, они пересекаются в точке P. Следовательно, сечение проходит через точку А. В плоскости BSD через точку P проведем прямую KN, параллельную BD, $K \in BS$, $N \in SD$, $\frac{SK}{KB} = \frac{SN}{ND} = 2.$ Искомое сечение – четырехугольник $AKMN$.

Обозначим $AB = a,\ AD = 4a,\ \angle A = \alpha,\ a = \sqrt{13},\ \alpha = 60°.$

Площадь сечения $AKMN$ будем вычислять по формуле $S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi}$, где $S_{пр}$ - площадь проекции сечения на плоскость основания, φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания. Проекцией является четырехугольник $ALQR$. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S = AB \cdot AD \sin\alpha = 4a^2 \sin\alpha$, $S = 26\sqrt{3}.$



Площадь проекции сечения вычисляется по формуле

$$S_{пр} = 2(S_{AOR} + S_{ROQ}) = \frac{S}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{S}{2} = 13\sqrt{3}.$$

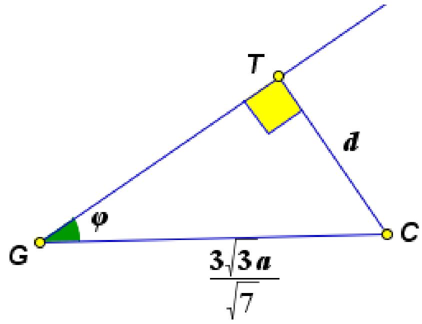
Плоскость сечения и плоскость основания пересекаются по прямой EF, параллельной BD и проходящей через точку A. Пусть CG – перпендикуляр к прямой EF, $H \in MF$, $HG \perp EF$. Угол CGH – угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, он равен φ.

Расстояние от точки S до плоскости сечения равно расстоянию от точки C до плоскости сечения и равно $d = 2\sqrt{3}$.

Отрезок CG – высота треугольника ECF, $EF \cdot CG = EC \cdot CF \sin\alpha$,

$$CG = \frac{EC \cdot CF \sin\alpha}{EF} = \frac{2BC \cdot 2CD \sin 60^\circ}{\sqrt{4BC^2 + 4CD^2 - 2 \cdot 4BC \cdot CD \cos 60^\circ}} = \frac{BC \cdot CD\sqrt{3}}{\sqrt{BC^2 + CD^2 - BC \cdot CD}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{13}}a.$$

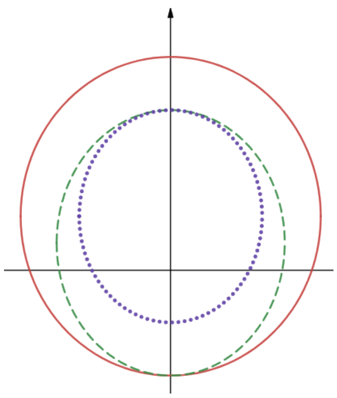
Проведем перпендикуляр CT к прямой GH, длина этого перпендикуляра равна d. Тогда $\sin\varphi = \frac{CT}{CG} = \frac{d\sqrt{13}}{4\sqrt{3}a} = \frac{1}{2}$, $\varphi = 30^\circ$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



$$S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi} = 26.$$

Ответ: 26.

6. За время освоения космического пространства на различных орбитах скопились сотни тысяч объектов космического мусора. Дальнейшее использование космического пространства может быть существенно осложнено возрастающей угрозой столкновения с этим мусором. Согласно результатам исследований удаление 3-5 крупных объектов в год с низких околоземных орбит позволяет предотвратить цепную реакцию роста объектов космического мусора в будущем. На данный момент работающей технологией по утилизации космического мусора является увод старых спутников. Это можно сделать с помощью аппаратов-захватчиков, которые буксируют мусор на орбиты для захоронения.



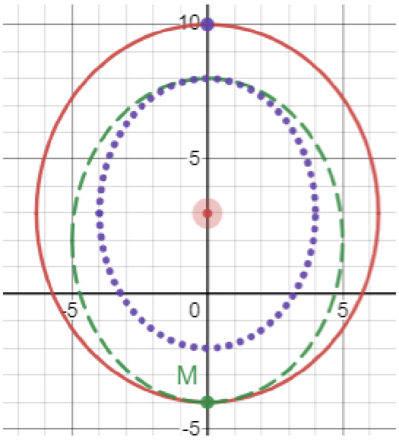
Рассмотрим плоскость орбиты захоронения. Пусть крупный фрагмент мусора движется в этой плоскости по эллиптической орбите с большой полуосью, равной 7000 *км*. (Для удобства вычислений все расчеты будем производить в тысячах километров.) Пусть уравнение траектории движения обломка задано следующим образом: $49x^2 + 40(y-3)^2 = 1960$.

На некотором удалении от указанной орбиты находится космическая научная станция, уравнение движения которой $25x^2 + 16(y-3)^2 = 400$. С нее стартует летательный аппарат, который движется по переходной эллиптической траектории: $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-y_0)^2}{z^2} = 1$. Он должен совершить маневр по переходу с одной орбиты на другую и плавно подойти к обломку для изменения его скорости и направления движения.

Известно, что скорость движения по эллиптической орбите вида $\frac{(x)^2}{b^2}+\frac{(y-c)^2}{a^2}=1, \quad a \ge b, \ c=\sqrt{a^2-b^2}$, с большой полуосью, равной a, вычисляется по формуле $V=\sqrt{\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}$, $\mu \approx 3,9\cdot 10^5 км^3/c^2$ -гравитационный потенциал Земли, r – расстояние от начала координат, расположенного в одном из фокусов эллипса, до движущейся точки.

Найдите минимальную скорость движения осколков космического мусора на указанной орбите. Определите параметры z, y_0, если известно, что переходная траектория должна проходить через точку, в которой скорость движения обломков максимальна и проходить через точку орбиты научной станции, в которой скорость движения станции минимальна. Выпишите уравнение переходной орбиты. (20 баллов)

Решение. Анализируя формулу скорости, можно заметить, что минимальное значение скорости движения по эллиптической орбите достигается в вершине эллипса, наиболее удаленной от фокуса, в котором находится начало координат, а максимальное – в ближайшей к фокусу вершине. Поэтому переходная траектория должна проходить через точки M(0, -4) и N(0, 7).



Для нахождения скорости рассмотрим точку (0,10)

$$(0,10) \Rightarrow \ V=\sqrt{\mu\left(\frac{2}{10}-\frac{1}{7}\right)}=\sqrt{3,9\cdot 10^5\left(\frac{4}{7\cdot 10000}\right)} \approx \sqrt{\frac{39\cdot 4}{7}}=\sqrt{5,6}\cdot 2 \approx 4,7\frac{км}{c}.$$

Здесь мы учли, что расчёты делали в тысячах километров.

Для нахождения переходной траектории учтем симметрию эллипса, положим

$$x=0 \ \Rightarrow \ y-y_0=\pm z \quad \Rightarrow y=y_0-z=-4, \ y=y_0+z=8 \ \Rightarrow \ y_0=\frac{8-4}{2}=2, \ z=6$$

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{(y-2)^2}{6^2}=1 \quad .$$

Ответ: 4,7; 6; 2; $\frac{x^2}{5^2}+\frac{(y-2)^2}{6^2}=1$

Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика
Предмет: Математика
Класс: 10

Задание 1 (максимальная оценка 12 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	3
Задание решено на 50%	6
Задание решено на 75%	9
Задание решено на 100%	12

Задание 2 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 3 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 4 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	5
Задание решено на 50%	10
Задание решено на 75%	15
Задание решено на 100%	20

Задание 6 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	5
Задание решено на 50%	10
Задание решено на 75%	15
Задание решено на 100%	20