Решение варианта №1 (Математика - 11 класс)

1. Буквы в симметричном слове АРБУЗУЗУБРА случайно переставили так, что полученное слово отличается от исходного. С какой вероятностью это слово снова будет симметричным? Ответ запишите в виде несократимой дроби. (12 баллов)

Решение. Число перестановок 11 букв (из них три У и по две А, Р, Б, З) составляет

$$N = \frac{11!}{3!(2!)^4} = \frac{11!}{96}$$

Чтобы получить симметричную перестановку, надо поставить У в середину и на 5 местах слева от неё расставить по одной букве А, Р, Б, У, З. Это можно сделать $M = 5!$ способами, после чего остальные 5 букв расставятся однозначно. Получаем вероятность

$$P = \frac{M-1}{N-1} = \frac{5!-1}{11!/96-1} = \frac{119}{415799}.$$

Ответ: $\frac{119}{415799}$.

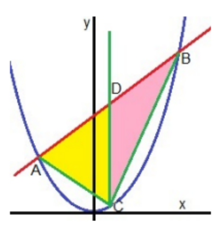
2. На параболе $y = x^2$ даны две точки: A с абсциссой -3 и B с абсциссой 5. Точка C лежит на дуге AB. Найдите максимальную возможную площадь треугольника ABC. (16 баллов)

Решение. Разрежем треугольник вертикальным отрезком CD, тогда

$$S(ABC) = S(ACD) + S(BCD) = \frac{(x_C - x_A)CD + (x_B - x_C)CD}{2} = \frac{x_B - x_A}{2} \cdot CD = 4 \cdot CD.$$

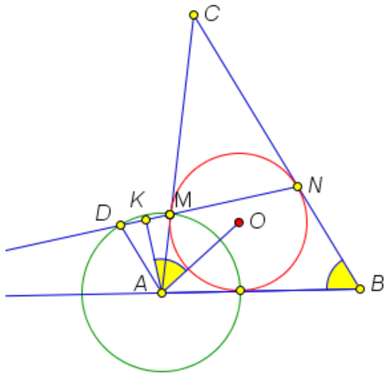
Пусть $y = kx + b$ — уравнение прямой AB. Тогда $CD = kx + b - x^2$. Этот трехчлен достигает максимум посередине между корнями, которые, очевидно, равны x_A и x_B. Значит, максимальная длина отрезка CD получится, если взять $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = 1$, и тогда $CD = 16$.

Ответ: 64.



3. В треугольник ABC со сторонами $AB = 5,\ BC = 8,\ AC = 7$ вписана окружность с центром в точке O, которая касается сторон AC и BC в точках M и N соответственно. На прямой MN отмечена точка K так, что угол OAK равен $60°$. Найдите длину отрезка KN. (16 баллов)

Решение. Проведем прямую AD, $AD \parallel BC$, D - точка пересечения с прямой MN. Треугольники CMN и AMD - подобные равнобедренные треугольники. Если AK_1 - биссектриса треугольника MAD, то



$$\angle OAK_1 = \frac{\angle BAC + \angle ACB}{2} = 90° - \frac{\angle ABC}{2}.$$

По теореме косинусов найдем угол $\angle ABC = \beta$:

$$\cos\beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{25+64-49}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}, \quad \beta = 60°. \text{ Тогда}$$

$$\angle OAK_1 = 90° - \frac{\beta}{2} = 60°, \text{ и } K_1 = K.$$

Найдем радиус окружности, вписанной в треугольник ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin\beta = 10\sqrt{3}, \quad S_{ABC} = \frac{P_{ABC} r}{2} = \frac{(AB+BC+AC)r}{2} = 10r, \quad r = \sqrt{3}. \text{Тогда}$$

$$BN = r/\operatorname{tg} 30° = 3, \quad CN = 5, \quad AM = 2.$$

По теореме косинусов найдем угол $\angle ACB = \gamma$: $\cos\gamma = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \dfrac{49+64-25}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \dfrac{11}{14}.$

Тогда $MN^2 = CM^2 + CN^2 - 2CM \cdot CN \cos\gamma = 50 - \dfrac{50 \cdot 11}{14} = \dfrac{75}{7}, \quad MN = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}},$

$$\frac{DM}{MN} = \frac{AM}{CM} = \frac{2}{5}, \quad KM = \frac{DM}{2} = \frac{MN}{5}, \quad KN = \frac{6MN}{5} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$2\sqrt{x^2+324} - f(x) \geq \frac{x^2+324}{f(x)-a} - a$$

имеет единственное решение, если

$f(x) = \sqrt{g^2(x) - 400}, \quad g(x) = 19 + 2\cos 2x + 4\cos x.$ (16 баллов)

Решение:

$$2\sqrt{x^2+324}-f(x)\geq\frac{x^2+324}{f(x)-a}-a \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{x^2+324}-f(x)-\frac{x^2+324}{f(x)-a}+a\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad f(x)-a-2\sqrt{x^2+324}+\frac{x^2+324}{f(x)-a}\leq 0\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(f(x)-a\right)^2-2\left(f(x)-a\right)\sqrt{x^2+324}+x^2+324}{f(x)-a}\leq 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\left(f(x)-a-\sqrt{x^2+324}\right)^2}{f(x)-a}\leq 0.$$

В левой части неравенства стоит четная функция. Если неравенство имеет единственное решение, то это решение $x=0$. Найдем все значения параметра a, при которых $x=0$ является решением. Поскольку $f(0)=15,$ то, подставляя $x=0$ в полученное неравенство, получаем $\frac{(a+3)^2}{15-a}\leq 0.$ Решениями этого неравенства являются $a\in\{-3\}\cup(15;+\infty).$

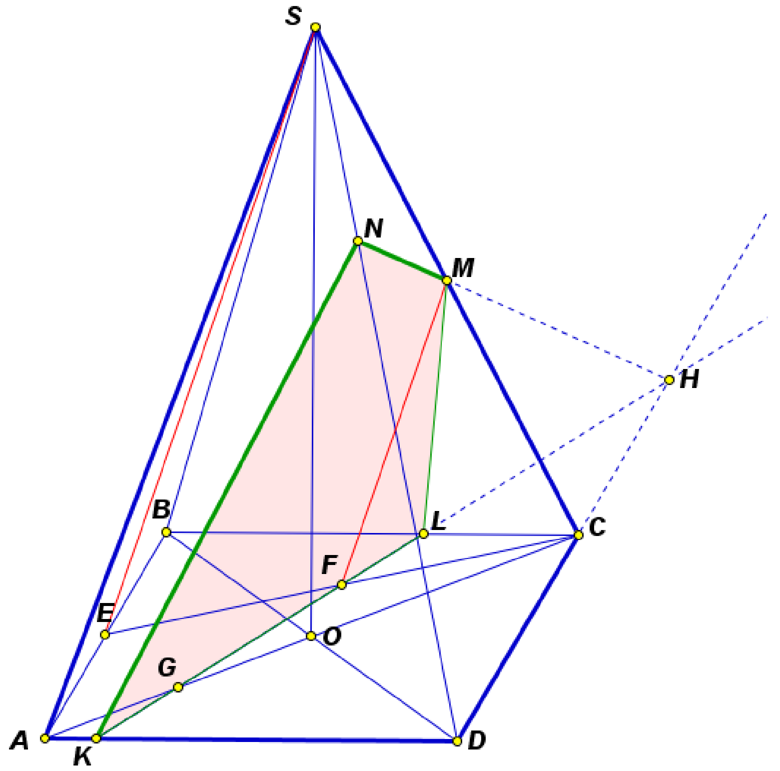
1) Пусть $a>15.$ Найдем множество значений функции $f(x)=\sqrt{g^2(x)-400}$, где $g(x)=19+2\cos 2x+4\cos x$. Определим сначала множество значений функции $z=g(x)=19+2\cos 2x+4\cos x$. Функция $g(x)$ определена на всей числовой оси. Сделаем замену переменного. Пусть $t=\cos x$. Тогда $z=17+4t^2+4t=16+(2t+1)^2$ при $t\in[-1;1]$, и $E_g=[16;25]$. Функция $y=f(x)=\sqrt{g^2(x)-400}$ имеет то же множество значений, что и функция $y=\sqrt{z^2-400}$ при $z\in[20;25]$, поскольку функция $y=\sqrt{z^2-400}$ определена при $z\in(-\infty;-20]\cup[20;+\infty)$, а $z=g(x)$ принимает все значения из отрезка $[16;25]$. Минимальное значение функции $y=\sqrt{z^2-400}$ на отрезке $[20;25]$ равно 0, максимальное – равно 15. Следовательно, $E_f=[0;15]$. Тогда при $a>15$ неравенство $\frac{\left(f(x)-a-\sqrt{x^2+324}\right)^2}{f(x)-a}\leq 0$ верно для всех x из области определения функции $f(x)$, т.е. имеет бесконечно много решений (это все $x\in\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right], k\in\mathbb{Z}.$)

2) 1) Пусть $a=-3.$ Тогда имеем $\frac{\left(f(x)+3-\sqrt{x^2+324}\right)^2}{f(x)+3}\leq 0.$ Поскольку $E_f=[0;15]$, и $f(x)+3>0,$ то приходим к уравнению $f(x)+3-\sqrt{x^2+324}=0,$ или $f(x)=\sqrt{x^2+324}-3.$ Из неравенств $f(x)\leq 15,$ $\sqrt{x^2+324}-3\geq 15,$ приходим к системе $\begin{cases} f(x)=15,\\ \sqrt{x^2+324}-3=15,\end{cases}\Leftrightarrow x=0.$ Таким образом, при $a=-3$ неравенство имеет единственное решение.

Ответ: $a=-3$.

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 2\sqrt{3}$, $AD = 4\sqrt{3}$ и углом A, равным $60°$. Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, $SO = 1$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной медиане SE боковой грани SAB и проходящей через середину ребра SC и середину отрезка AO. (20 баллов)

Решение.



Построим сечение пирамиды. Пусть M – середина SC, а G – середина AO. В плоскости SEC (SE – медиана грани SAB) через точку M проведем прямую MF, параллельную SE, $F \in EC$, MF – средняя линия треугольника SEC.

В плоскости ABC через точки G и F проведем прямую KL, $K \in AD$, $L \in BC$.

Пусть H – точка пересечения прямых KL и CD. В плоскости SDC через точки H и M проведем прямую MH, N – точка пересечения прямых MH и SD.

Искомое сечение $KLMN$.

Обозначим $AB = a$, $AD = 2a$, $\angle A = \alpha$, $a = 2\sqrt{3}$, $\alpha = 60°$.

Пусть P – точка пересечения прямых KL и AB. Треугольники FEP и FCH равны, $PE = CH$.

$\Delta GAP \sim \Delta GCH$,

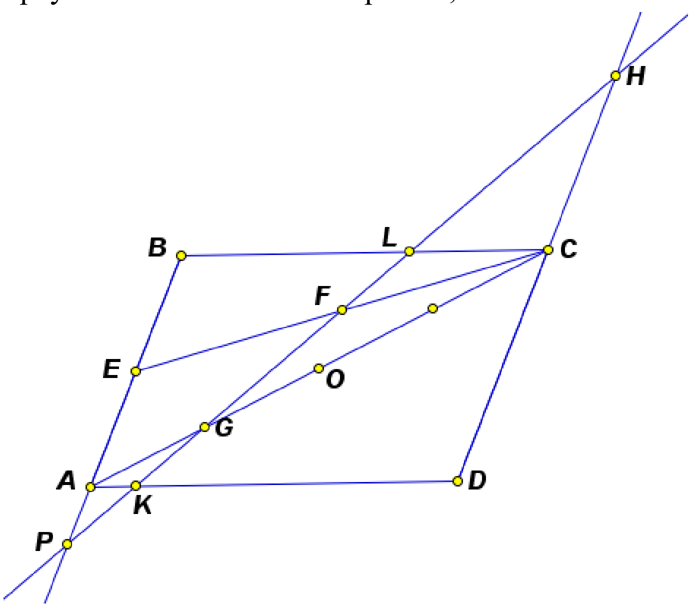
$$\frac{AP}{CH} = \frac{1}{3}, \quad AP = \frac{CH}{3}, \quad CH = \frac{a}{2} + \frac{CH}{3},$$

$$CH = \frac{3a}{4}, \quad AP = \frac{a}{4}.$$

$\Delta AKP \sim \Delta BLP$, $\dfrac{AK}{BL} = \dfrac{1}{5}$, $AK = x$, $BL = 5x$.

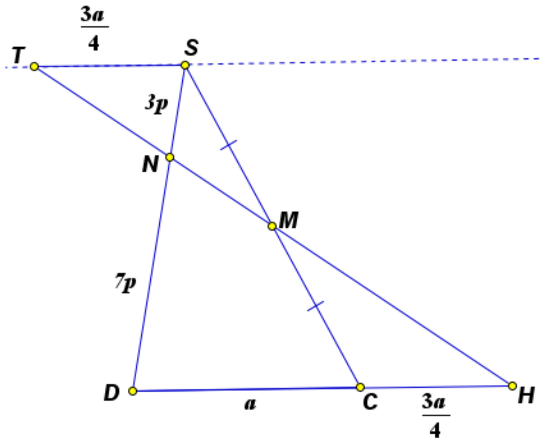
$\Delta CLH \sim \Delta DKH$,

$$\frac{CL}{DK} = \frac{3}{7}, \quad CL = 3y, \quad DK = 7y.$$



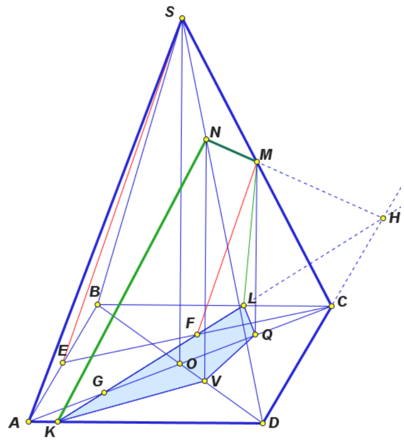
$$\begin{cases} x+7y=2a, \\ 5x+3y=2a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7y=2a, \\ 5x+3y=2a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a/4, \\ x=a/4. \end{cases} \quad AK=a/4, \quad BL=5a/4,\ CL=3a/4, \quad DK=7a/4.$$

$CL=3a/4, \quad DK=7a/4.$



В плоскости грани SCD проведем прямую TS параллельно DC, точка T – точка пересечения этой прямой с прямой MH. Треугольники MCH и MST равны, $TS=CH$. $\Delta TSN \sim \Delta HDN$, $\dfrac{SN}{ND}=\dfrac{3}{7}$.

Площадь сечения $KLMN$ будем вычислять по формуле $S_{сеч}=\dfrac{S_{пр}}{\cos\varphi}$, где $S_{пр}$ - площадь проекции сечения на плоскость основания, φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания.



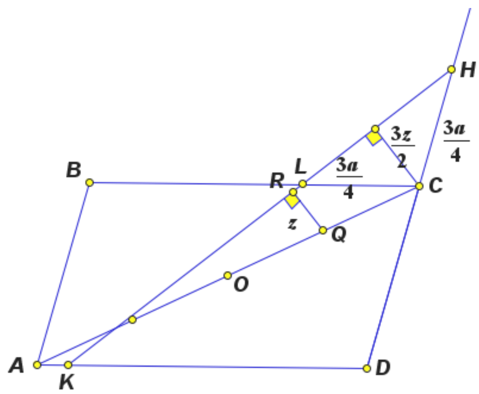
Проекцией является четырехугольник $KLQV$. Пусть h – длина высоты параллелограмма $ABCD$, проведенной к стороне AD, площадь $S=AB\cdot AD\sin\alpha=2a^2\sin\alpha=2ah$ - площадь параллелограмма $ABCD$. $S=12\sqrt{3}$

Площадь проекции сечения вычисляется по формуле

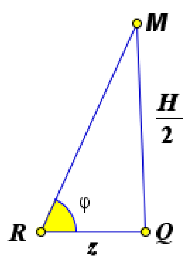
$$S_{пр}=S_{KLCD}-S_{CLQ}-S_{CQVD}-S_{DKV}=$$

$$=\frac{5ah}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{4}-\left(\frac{S}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{S}{4}\right)-\frac{7}{8}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{S}{4}=$$

$$=\frac{S}{4}\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{16}-\frac{17}{20}-\frac{49}{80}\right)=\frac{S}{4}\cdot\frac{200-15-68-49}{80}=\frac{17S}{80}=\frac{51\sqrt{3}}{20}.$$



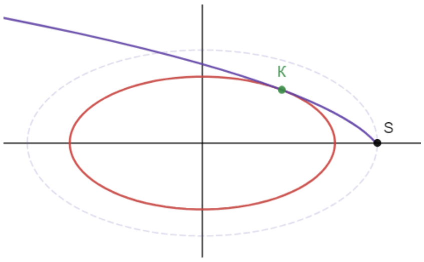
В плоскости основания из точки Q проведем перпендикуляр QR к прямой KL, пусть $QR=z$. Тогда перпендикуляр, проведенный из точки C к прямой KL, будет равен $3z/2$. Угол MRQ равен φ - углу между плоскостью сечения и плоскостью основания. Треугольник LCH равнобедренный, $LC=CH=\dfrac{3a}{4}$. Угол LCH равен $120°$, угол CLH равен $30°$, и $3z/2=3a/8$, $z=a/4$. Если $SO=H$, то $MQ=H/2$, $\operatorname{tg}\varphi=2H/a=1/\sqrt{3}$, $\varphi=30°$, $\cos\varphi=\sqrt{3}/2$.



Окончательно имеем $S_{сеч}=\dfrac{51\sqrt{3}}{20}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{51}{10}$. **Ответ:** $\dfrac{51}{10}$.

6. За время освоения космического пространства на различных орбитах скопилось по данным NASA около 300 тысяч объектов космического мусора. Дальнейшее использование космического пространства в ближайшем будущем может быть существенно осложнено всё возрастающей угрозой столкновения с космическим мусором. Согласно результатам исследований, удаление 3-5 крупных объектов в год с низких околоземных орбит позволяет предотвратить цепную реакцию роста объектов космического мусора в будущем. На данный момент работающей технологией по утилизации космического мусора является увод старых спутников. Это можно сделать с помощью аппаратов-захватчиков, которые буксируют мусор на орбиты для захоронения.

Рассмотрим плоскость орбиты захоронения. Пусть крупный фрагмент мусора движется в этой плоскости по эллиптической орбите с большой полуосью равной 5000 *км*, малой – 2500 *км*. (Для удобства вычислений все расчеты будем производить в тысячах километров.) Введем систему координат с началом отсчета в центре рассматриваемого эллипса, с осью абсцисс, направленной вдоль большой полуоси. Тогда уравнение траектории движения обломка запишется следующим образом: $x^2+4y^2=25$.



На некотором удалении по оси абсцисс находится межпланетная научная станция *S*. С нее стартует летательный аппарат-захватчик, который движется по параболической траектории: $(y+1)^2=-9\cdot(x-7)/4$. Он должен совершить маневр по переходу с одной орбиты на другую и плавно подойти к обломку для изменения его скорости и направления движения.

Определите координаты точки касания указанных траекторий и угол, который образует с положительным направлением оси абсцисс касательная к параболической траектории в начальный момент времени в точке *S*. (20 баллов)

Решение: Выразим из уравнений $x^2+4y^2=25$, $(y+1)^2=-9\cdot(x-7)/4$ функции y(x) в явном виде $y=\pm\sqrt{\dfrac{25-x^2}{4}}$ и $y=-1\pm\sqrt{-9\cdot(x-7)/4}$, найдем их производные $y'=\pm\dfrac{1}{4}\dfrac{(-2x)}{\sqrt{25-x^2}}$ и $y'=\pm\dfrac{1}{4}\dfrac{(-9)}{\sqrt{-9\cdot(x-7)}}$. Приравняем производные друг к другу

$$\pm\frac{1}{4}\frac{(-2x)}{\sqrt{25-x^2}}=\pm\frac{1}{4}\frac{(-9)}{\sqrt{-9\cdot(x-7)}} \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{25-x^2}}=\frac{9}{\sqrt{-9\cdot(x-7)}} \Rightarrow \frac{4x^2}{25-x^2}=\frac{9}{7-x} \quad \text{или}$$

$28x^2-4x^3=9\cdot25-9x^2$. Будем искать целые решения уравнения. Если такие есть, то они являются делителями свободного члена, x=3 – подходит. Преобразуем уравнение, поделив на x-3, получим

$$(x-3)(4x^2-25x-75)=0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)\left(x-\frac{25+5\sqrt{73}}{8}\right)\left(x-\frac{25-5\sqrt{73}}{8}\right)=0$$

, но x должен быть положительным и меньше 7. Подставляя 3 в любое из исходных выражений, находим y=2. Значит координаты точки касания (3,2).

При y=0, $(1)^2 = -9\cdot(x-7)/4 \quad \Rightarrow \ x = 59/9$ Подставляем в производную и находим тангенс угла касательной в начальный момент. $y' = \pm\frac{1}{8}\frac{(-9)}{\sqrt{-9\cdot(x-7)/4}} = \pm(\frac{-9}{8}) \quad \Rightarrow \quad \alpha = arctg(\frac{-9}{8})$

Ответ: (3, 2) , $\alpha = -arctg\left(\frac{9}{8}\right)$ или $\alpha = \pi - arctg\left(\frac{9}{8}\right)$.

Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика
Предмет: Математика
Класс: 11

Задание 1 (максимальная оценка 12 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	3
Задание решено на 50%	6
Задание решено на 75%	9
Задание решено на 100%	12

Задание 2 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 3 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 4 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	5
Задание решено на 50%	10
Задание решено на 75%	15
Задание решено на 100%	20

Задание 6 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	5
Задание решено на 50%	10
Задание решено на 75%	15
Задание решено на 100%	20

Решение варианта №2 (Математика - 11 класс)

1. Буквы в симметричном слове МОЛОТЭТОЛОМ случайно переставили так, что полученное слово отличается от исходного. С какой вероятностью это слово снова будет симметричным? Ответ запишите в виде несократимой дроби. (12 баллов)

Решение. Число перестановок 11 букв (из них четыре О и по две М, Л, Т) составляет

$$N = \frac{11!}{4!(2!)^3} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5.$$

Чтобы получить симметричную перестановку, надо поставить Э в середину и на 5 местах слева от неё расставить буквы М, О, О, Л, Т. Это можно сделать $M = 5!/2! = 60$ способами, после чего остальные 5 букв расставятся однозначно. Получаем вероятность

$$P = \frac{M-1}{N-1} = \frac{60-1}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 - 1} = \frac{59}{207899}.$$

Ответ: $\frac{59}{207899}$.

2. На параболе $y = x^2$ даны две точки: A с абсциссой -4 и B с абсциссой 8. Точка C лежит на дуге AB. Найдите максимальную возможную площадь треугольника ABC. (16 баллов)

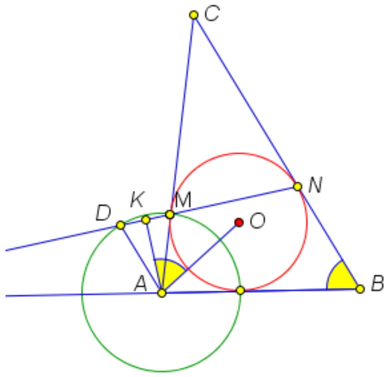
Решение. Разрежем треугольник вертикальным отрезком CD, тогда

$$S(ABC) = S(ACD) + S(BCD) = \frac{(x_C - x_A)CD + (x_B - x_C)CD}{2} = \frac{x_B - x_A}{2} \cdot CD = 6 \cdot CD.$$

Пусть $y = kx + b$ — уравнение прямой AB. Тогда $CD = kx + b - x^2$. Этот трехчлен достигает максимум посередине между корнями, которые, очевидно, равны x_A и x_B. Значит, максимальная длина отрезка CD получится, если взять $x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 2$, и тогда $CD = 36$.

Ответ: 216.

3. В треугольник ABC со сторонами $AB = 10$, $BC = 16$, $AC = 14$ вписана окружность с центром в точке O, которая касается сторон AC и BC в точках M и N соответственно. На прямой MN отмечена точка K так, что угол OAK равен $60°$. Найдите площадь треугольника OAK. (16 баллов)



Решение. Проведем прямую AD, $AD \parallel BC$, D - точка пересечения с прямой MN. Треугольники CMN и AMD - подобные равнобедренные треугольники. Если AK_1 - биссектриса треугольника MAD, то

$$\angle OAK_1 = \frac{\angle BAC + \angle ACB}{2} = 90° - \frac{\angle ABC}{2}.$$

По теореме косинусов найдем угол $\angle ABC = \beta$:

$$\cos\beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{100+256-196}{2 \cdot 10 \cdot 16} = \frac{1}{2}, \quad \beta = 60°. \text{ Тогда } \angle OAK_1 = 90° - \frac{\beta}{2} = 60°, \text{ и}$$

$K_1 = K$.

Найдем радиус окружности, вписанной в треугольник ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin\beta = 40\sqrt{3}, \quad S_{ABC} = \frac{P_{ABC} r}{2} = \frac{(AB+BC+AC)r}{2} = 20r, \quad r = 2\sqrt{3}. \text{ Тогда}$$

$BN = r/\operatorname{tg} 30° = 6, \quad CN = 10, \quad AM = 4.$

По теореме косинусов найдем угол $\angle ACB = \gamma$: $\cos\gamma = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \dfrac{196+256-10}{2 \cdot 14 \cdot 16} = \dfrac{11}{14}$.

Тогда $MN^2 = CM^2 + CN^2 - 2CM \cdot CN \cos\gamma = 200 - \dfrac{200 \cdot 11}{14} = \dfrac{300}{7}$, $MN = \dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

$\dfrac{DM}{MN} = \dfrac{AM}{CM} = \dfrac{2}{5}$, $\quad AK = \dfrac{2}{5}\sqrt{CN^2 - (MN/2)^2} = \dfrac{2}{5}\sqrt{100 - (75/7)} = \dfrac{10}{\sqrt{7}}$. Найдем AO:

$AO = \sqrt{r^2 + (AB - BN)^2} = 2\sqrt{7}$. Тогда $S_{OAK} = \dfrac{1}{2} AK \cdot AO \sin 60° = 5\sqrt{3}$.

Ответ: $5\sqrt{3}$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$2\sqrt{x^2+100} - f(x) \geq \dfrac{x^2+100}{f(x)-a} - a$ имеет единственное решение, если

$f(x) = \sqrt{g^2(x) - 120}$, $g(x) = 7 + 2\cos 2x + 4\cos x$. (16 баллов)

Решение:

$$2\sqrt{x^2+100}-f(x)\geq\frac{x^2+100}{f(x)-a}-a \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{x^2+100}-f(x)-\frac{x^2+100}{f(x)-a}+a\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad f(x)-a-2\sqrt{x^2+100}+\frac{x^2+100}{f(x)-a}\leq 0\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(f(x)-a\right)^2-2\left(f(x)-a\right)\sqrt{x^2+100}+x^2+100}{f(x)-a}\leq 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\left(f(x)-a-\sqrt{x^2+100}\right)^2}{f(x)-a}\leq 0.$$

В левой части неравенства стоит четная функция. Если неравенство имеет единственное решение, то это решение $x=0$. Найдем все значения параметра *a*, при которых $x=0$ является решением. Поскольку $f(0)=7,$ то, подставляя $x=0$ в полученное неравенство, получаем $\frac{(a+3)^2}{7-a}\leq 0.$ Решениями этого неравенства являются $a\in\{-3\}\cup(7;+\infty).$

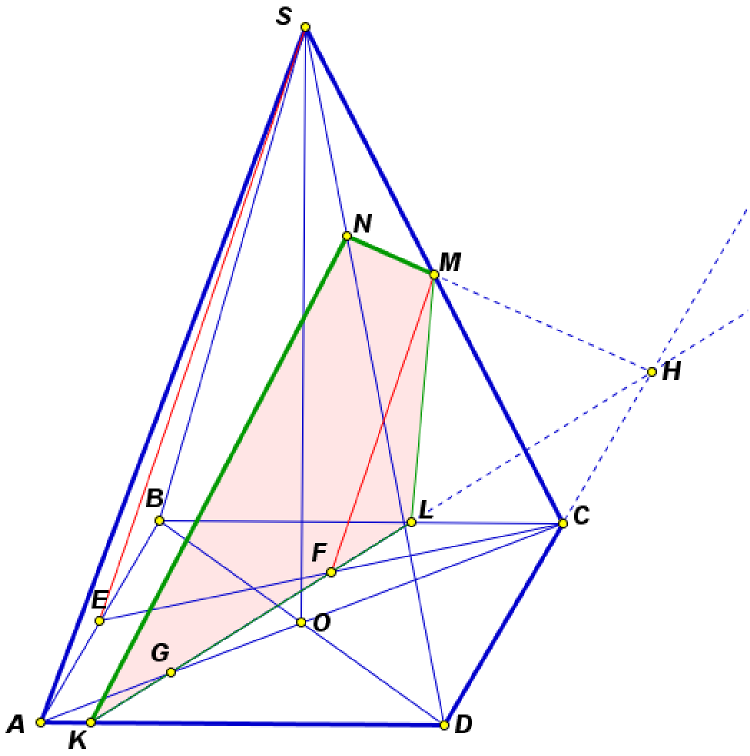
1) Пусть $a>7.$ Найдем множество значений функции $f(x)=\sqrt{g^2(x)-120}$, где $g(x)=7+2\cos 2x+4\cos x.$ Определим сначала множество значений функции $z=g(x)=7+2\cos 2x+4\cos x$. Функция $g(x)$ определена на всей числовой оси. Сделаем замену переменного. Пусть $t=\cos x$. Тогда $z=5+4t^2+4t=4+(2t+1)^2$ при $t\in[-1;1]$, и $E_g=[4;13].$ Функция $y=f(x)=\sqrt{g^2(x)-120}$ имеет то же множество значений, что и функция $y=\sqrt{z^2-120}$ при $z\in\left[\sqrt{120};13\right]$, поскольку функция $y=\sqrt{z^2-120}$ определена при $z\in(-\infty;-\sqrt{120}]\cup[\sqrt{120};+\infty)$, а $z=g(x)$ принимает все значения из отрезка $[4;13].$ Минимальное значение функции $y=\sqrt{z^2-120}$ на отрезке $\left[\sqrt{120};13\right]$ равно 0, максимальное – равно 7. Следовательно, $E_f=[0;7].$ Тогда при $a>7$ неравенство $\frac{\left(f(x)-a-\sqrt{x^2+100}\right)^2}{f(x)-a}\leq 0$ верно для всех *x* из области определения функции $f(x)$, т.е. имеет бесконечно много решений (это все $x\in\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right], k\in\mathbb{Z}.$)

2) 1) Пусть $a=-3.$ Тогда имеем $\frac{\left(f(x)+3-\sqrt{x^2+100}\right)^2}{f(x)+3}\leq 0.$ Поскольку $E_f=[0;7]$, и $f(x)+3>0,$ то приходим к уравнению $f(x)+3-\sqrt{x^2+100}=0,$ или $f(x)=\sqrt{x^2+100}-3.$ Из неравенств $f(x)\leq 7,$ $\sqrt{x^2+100}-3\geq 7,$ приходим к системе $\begin{cases} f(x)=7,\\ \sqrt{x^2+100}-3=7,\end{cases}\Leftrightarrow x=0.$ Таким образом, при $a=-3$ неравенство имеет единственное решение.

Ответ: $a=-3$.

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ с углом A, равным $60°$, стороной $AD = 8\sqrt{3}$ и высотой, опущенной на эту сторону, равной 6. Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, $SO = 2$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной медиане SE боковой грани SAB и проходящей через середину ребра SC и середину отрезка AO. (20 баллов)

Решение.



Построим сечение пирамиды. Пусть M – середина SC, а G – середина AO. В плоскости SEC (SE – медиана грани SAB) через точку M проведем прямую MF, параллельную SE, $F \in EC$, MF – средняя линия треугольника SEC.

В плоскости ABC через точки G и F проведем прямую KL, $K \in AD$, $L \in BC$.

Пусть H – точка пересечения прямых KL и CD. В плоскости SDC через точки H и M проведем прямую MH, N – точка пересечения прямых MH и SD.

Искомое сечение $KLMN$. Пусть h – высота $ABCD$, опущенная на AD, $AB = \dfrac{h}{\sin 60°} = 4\sqrt{3}$.

Обозначим $AB = a$, $AD = 2a$, $\angle A = \alpha$, $a = 4\sqrt{3}$, $\alpha = 60°$.

Пусть P – точка пересечения прямых KL и AB. Треугольники FEP и FCH равны, $PE = CH$. $\Delta GAP \sim \Delta GCH$,

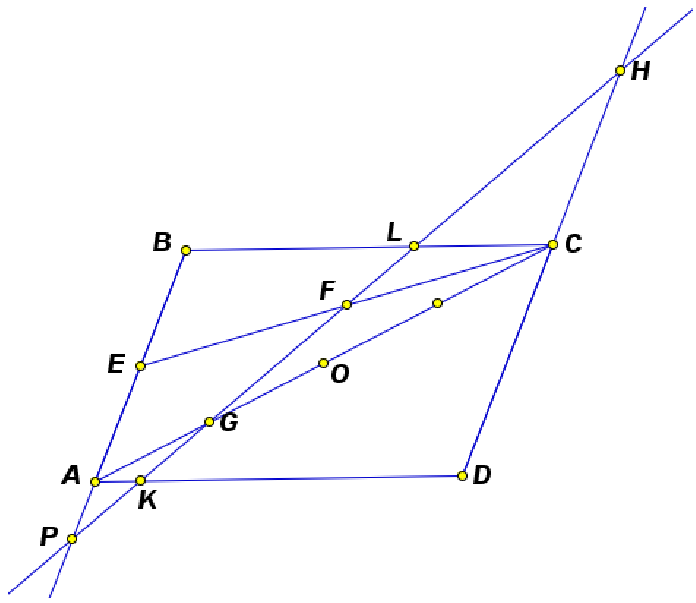
$$\frac{AP}{CH} = \frac{1}{3}, \quad AP = \frac{CH}{3}, \quad CH = \frac{a}{2} + \frac{CH}{3},$$

$$CH = \frac{3a}{4}, \quad AP = \frac{a}{4}.$$

$$\Delta AKP \sim \Delta BLP, \; \frac{AK}{BL} = \frac{1}{5}, \quad AK = x, \quad BL = 5x.$$

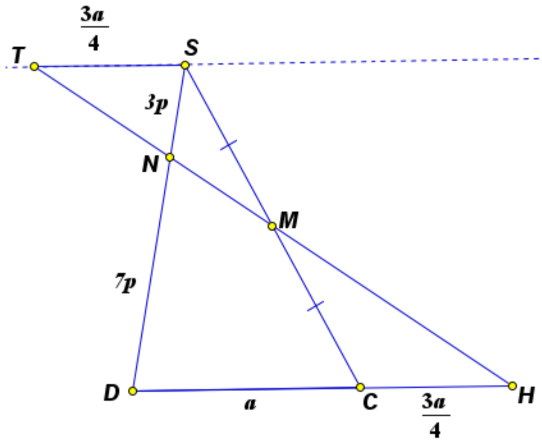
$\Delta CLH \sim \Delta DKH$,

$$\frac{CL}{DK} = \frac{3}{7}, \quad CL = 3y, \quad DK = 7y.$$



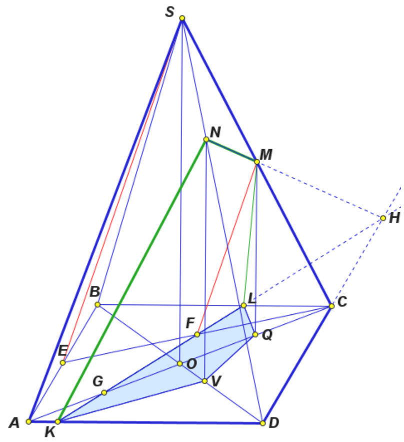
$$\begin{cases} x+7y=2a, \\ 5x+3y=2a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7y=2a, \\ 5x+3y=2a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a/4, \\ x=a/4. \end{cases} \quad AK=a/4, \quad BL=5a/4,\ CL=3a/4, \quad DK=7a/4.$$

$CL=3a/4, \quad DK=7a/4.$



В плоскости грани SCD проведем прямую TS параллельно DC, точка T – точка пересечения этой прямой с прямой MH. Треугольники MCH и MST равны, $TS=CH$. $\Delta TSN \sim \Delta HDN$, $\dfrac{SN}{ND}=\dfrac{3}{7}$.

Площадь сечения $KLMN$ будем вычислять по формуле $S_{сеч}=\dfrac{S_{пр}}{\cos\varphi}$, где $S_{пр}$ - площадь проекции сечения на плоскость основания, φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания.



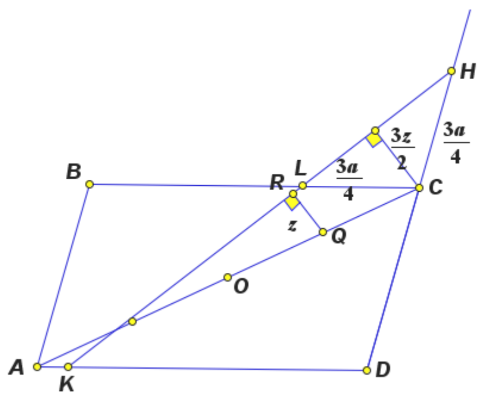
Проекцией является четырехугольник $KLQV$. Пусть h – длина высоты параллелограмма $ABCD$, проведенной к стороне AD, площадь $S=AB\cdot AD\sin\alpha=2a^2\sin\alpha=2ah$ - площадь параллелограмма $ABCD$. $S=48\sqrt{3}$

Площадь проекции сечения вычисляется по формуле

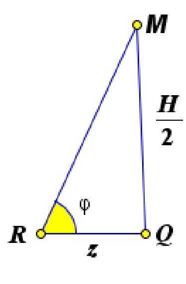
$$S_{пр}=S_{KLCD}-S_{CLQ}-S_{CQVD}-S_{DKV}=$$

$$=\frac{5ah}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{4}-\left(\frac{S}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{S}{4}\right)-\frac{7}{8}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{S}{4}=$$

$$=\frac{S}{4}\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{16}-\frac{17}{20}-\frac{49}{80}\right)=\frac{S}{4}\cdot\frac{200-15-68-49}{80}=\frac{17S}{80}=\frac{51\sqrt{3}}{5}.$$



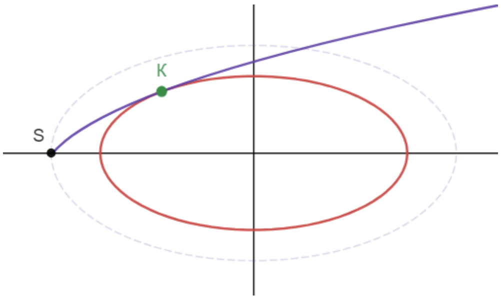
В плоскости основания из точки Q проведем перпендикуляр QR к прямой KL, пусть $QR=z$. Тогда перпендикуляр, проведенный из точки C к прямой KL, будет равен $3z/2$. Угол MRQ равен φ - углу между плоскостью сечения и плоскостью основания. Треугольник LCH равнобедренный, $LC=CH=\dfrac{3a}{4}$. Угол LCH равен $120°$, угол CLH равен $30°$, и $3z/2=3a/8$, $z=a/4$. Если $SO=H$, то $MQ=H/2$, $\operatorname{tg}\varphi=2H/a=1/\sqrt{3}$, $\varphi=30°$, $\cos\varphi=\sqrt{3}/2$.



Окончательно имеем $S_{сеч}=\dfrac{51\sqrt{3}}{5}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{102}{5}=20{,}4$. **Ответ:** $\dfrac{102}{5}$.

6. За время освоения космического пространства на различных орбитах скопилось по данным NASA около 300 тысяч объектов космического мусора. Дальнейшее использование космического пространства в ближайшем будущем может быть существенно осложнено всё возрастающей угрозой столкновения с космическим мусором. Согласно результатам исследований удаление 3-5 крупных объектов в год с низких околоземных орбит позволяет предотвратить цепную реакцию роста объектов космического мусора в будущем. На данный момент работающей технологией по утилизации космического мусора является увод старых спутников. Это можно сделать с помощью аппаратов-захватчиков, которые буксируют мусор на орбиты для захоронения.

Рассмотрим плоскость орбиты захоронения. Пусть крупный фрагмент мусора движется в этой плоскости по эллиптической орбите с большой полуосью равной 5000 *км*, малой – 2500 *км*. (Для удобства вычислений все расчеты будем производить в тысячах километров.) Введем систему координат с началом отсчета в центре рассматриваемого эллипса, с осью абсцисс, направленной вдоль большой полуоси. Тогда уравнение траектории движения обломка запишется следующим образом: $x^2+4y^2=25$.



На некотором удалении по оси абсцисс находится межпланетная научная станция *S*. С нее стартует летательный аппарат-захватчик, который движется по параболической траектории $(y+1)^2=9\cdot(x+7)/4$. Он должен совершить маневр по переходу с одной орбиты на другую и плавно подойти к обломку, для изменения его скорости и направления движения.

Определите координаты точки касания указанных траекторий и угол, который образует с положительным направлением оси абсцисс касательная к параболической траектории в начальный момент времени в точке *S*. (20 баллов)

Решение: Выразим из уравнений $x^2+4y^2=25$, $(y+1)^2=9\cdot(x+7)/4$ функции y(x) в явном виде $y=\pm\sqrt{\dfrac{25-x^2}{4}}$ и $y=-1\pm\sqrt{9\cdot(x+7)/4}$, найдем их производные $y'=\pm\dfrac{1}{4}\dfrac{(-2x)}{\sqrt{25-x^2}}$, $y'=\pm\dfrac{1}{4}\dfrac{9}{\sqrt{9\cdot(x+7)}}$. Приравняем эти производные друг к другу

$$\pm\frac{1}{4}\frac{(-2x)}{\sqrt{25-x^2}}=\pm\frac{1}{4}\frac{9}{\sqrt{9\cdot(x+7)}} \quad\Rightarrow\quad \frac{-2x}{\sqrt{25-x^2}}=\frac{9}{\sqrt{9\cdot(x+7)}} \quad\Rightarrow\quad \frac{4x^2}{25-x^2}=\frac{9}{x+7} \quad \text{или}$$

$4x^3+28x^2=9\cdot25-9x^2$. Будем искать целые решения уравнения. Если такие есть, то они являются делителями свободного члена; x=-3 – подходит. Преобразуем уравнение, поделив на x+3, получим $(x+3)(4x^2+25x-75)=0 \quad\Rightarrow\quad (x+3)\left(x-\dfrac{-25+5\sqrt{73}}{8}\right)\left(x-\dfrac{-25-5\sqrt{73}}{8}\right)=0$, но x должен быть отрицательным и больше -7. Подставляя -3 в любое из исходных выражений, находим y=2. Значит координаты точки касания (-3,2). При y=0, $(1)^2=9\cdot(x+7)/4 \quad\Rightarrow\quad x=-59/9$

Подставляем в производную и находим тангенс угла касательной в начальный момент. $y' = \pm\frac{1}{8}\frac{9}{\sqrt{9\cdot(x+7)/4}} = \pm\frac{9}{8} \quad \Rightarrow \quad \alpha = arctg\left(\frac{9}{8}\right)$ Мы выбираем верхнюю часть параболы.

Ответ: (-3, 2) $\alpha = arctg\left(\frac{9}{8}\right)$.

Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика
Предмет: Математика
Класс: 11

Задание 1 (максимальная оценка 12 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	3
Задание решено на 50%	6
Задание решено на 75%	9
Задание решено на 100%	12

Задание 2 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 3 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 4 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	5
Задание решено на 50%	10
Задание решено на 75%	15
Задание решено на 100%	20

Задание 6 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	5
Задание решено на 50%	10
Задание решено на 75%	15
Задание решено на 100%	20