Олимпиада: 5 февраля

Вариант: 1 Класс: 8

**Задача 1** (*15 баллов*). В городе N ателье «Волшебный стежок», «Швейный блюз», «Шитьё с душой» и «Тканевые сны» распределяют 20 городских заказов. Каждое ателье хочет забрать наибольшее количество заказов. Ателье перечислены в порядке убывания числа работников и швейных мощностей. Правила обсуждения распределения заказов такие: сначала самое крупное ателье предлагает свой вариант. Если больше половины всех ателье этот вариант отвергают, то второе по мощности ателье вносит свое предложение (первое ателье никакого участия в дальнейшем распределении заказов не принимает и заказов не получает). Если новое предложение отвергается большинством голосов, то предлагавшее его ателье также отстраняется от обсуждения, и процедура повторяется для оставшихся двух ателье. Каким в итоге будет распределение заказов, если каждое ателье предпочитает то, в котором доля его заказов больше? (Решение предполагает рассмотрение всех случаев и обоснования).

**Решение.**

Рассмотрим стратегии. Если два ателье(20;0). Если три ателье:1)(20,0,0)-первое ателье теряет всё;2)(19,1,0)-если откажется второе, то будет (20,0);3)(19,0,1)-третье ателье отказываться не будет, тк иначе получит 0 заказов. Если четыре ателье:1)(20,0,0,0)⇨(19,0,1);2)(19,1,0,0)-если второе ателье откажется, то будет (19,0,1);3)(19,0,1,0)-если третье ателье откажется, то получит 0⇨это оптимальная стратегия;4)(19,0,0,1)-четвертое ателье может и отказаться, т.к. для него ничего не изменится⇨первому ателье так поступать не стоит.

**Ответ:** (19,0,1,0).

| Баллы | Критерии |
|---|---|
| 15 | Верное обоснованное решение |
| 10 | Верный ответ с недостатками обоснования |
| 5 | Разобраны не все варианты |

**Задача 2** (*15 баллов*). Решите уравнение. $1-|x-2|^2-(2-x)^2\left(1-(x-2)^2\right)=\left(x^2-4x+4\right)^2$

**Решение.**

$t=|x-2|^2;1-t+t(t-1)=t^2;(1-t)(1-t)=t^2;1-t=t\vee 1-t=-t;t=\frac{1}{2};|x-2|=\frac{1}{\sqrt{2}};$

$x=2\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**Ответ:** $x=2\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

| Баллы | Критерии |
|---|---|
| 15 | Решение верно. |
| 10 | Ход решения верный, но допущена одна арифметическая ошибка. |
| 5 | Сделана замена переменной, но есть ошибки в применении формул или раскрытии модуля. |

**Задача 3** (*15 баллов*). В остроугольном $\triangle ABC$ точка $H$ - точка пересечения высот, точка О – центр вписанной окружности. Угол $AHB$ в $k$ раз больше угла $AOB$. Найти величину угла $ACB$. Какие значения может принимать коэффициент $k$?

**Решение.**

Обозначим $\angle ACB = \alpha$

$$\angle AOB = 180 - \frac{180-\alpha}{2} = 90 + \frac{\alpha}{2}$$

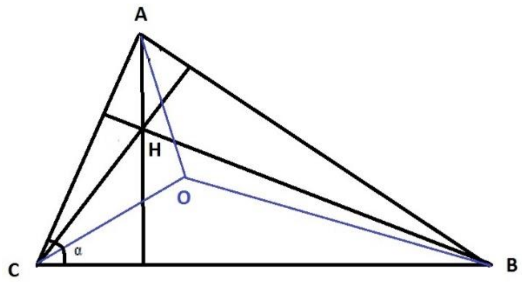
$$\angle AHB = 180 - \alpha$$

$$180 - \alpha = k \cdot (90 + \frac{\alpha}{2})$$

$$2 \cdot 90 - k \cdot 90 = \alpha + k \cdot \frac{\alpha}{2}$$

$$90 \cdot (2-k) = \frac{\alpha \cdot (2+k)}{2}$$

$$\alpha = \frac{180 \cdot (2-k)}{2+k}, 0 < k < 2$$

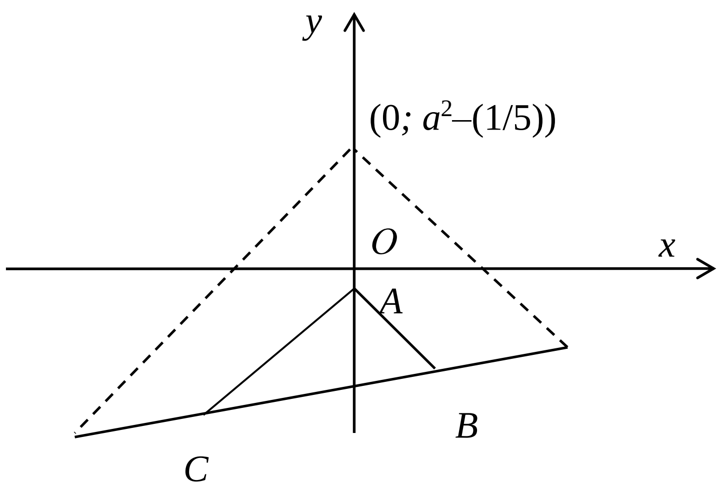



**Ответ:** $\angle ACB = \frac{180 \cdot (2-k)}{2+k}, 0 < k < 2$

| Баллы | Критерии |
|---|---|
| 15 | Решение верно. |
| 13 | Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна ошибка. |
| 5 | За правильно найденное значение каждого из углов: $\angle AOB$ или $\angle AHB$. |
| 0 | Решение не верно или отсутствует |

**Задача 4** (*15 баллов*). При каких значениях параметра *a* фигура, ограниченная графиками $y = a^2 - \frac{1}{5} - |x|$ и $5y - x = -9$ имеет наименьшую площадь? Найдите эту наименьшую площадь.

**Решение**.



Изобразим на плоскости $xOy$ графики, для $y=a^2-\frac{1}{5}-|x|$ получаем при $x>0,\ \ y=a^2-\frac{1}{5}-x$, при $x<0,\ \ y=a^2-\frac{1}{5}+x$, при $x=0,\ \ y=a^2-\frac{1}{5}$. График показан на рисунке пунктиром. Самое нижнее положение точки пересечения с осью Оу будет при $a=0$, это точка $A\left(0,-\frac{1}{5}\right)$. Графиком $5y-x=-9$ будет прямая ВС. На прямой ВС при $x=0,\ \ y=-\frac{9}{5}$, эта точка ниже $A\left(0,-\frac{1}{5}\right)$, поэтому при любом значении параметра графики ограничивают треугольник. Наименьшее значение площади будет при $a=0$, это площадь треугольника АВС с вершинами $A\left(0,-\frac{1}{5}\right)$, $B\left(\frac{4}{3},-\frac{23}{15}\right)$, $C\left(-2,-\frac{11}{5}\right)$.

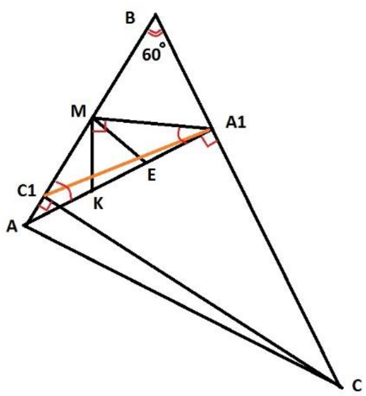
Надо найти площадь прямоугольного треугольника АВС. Находим катеты $AB=\frac{4}{3}\sqrt{1^2+(-1)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}, AC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, площадь равна $\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{8}{3}$.

**Ответ:** $a=0$, площадь $\frac{8}{3}$ .

| Баллы | Критерии |
|---|---|
| 15 | Полное обоснованное решение |
| 12 | Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение. |
| 10 | При любом верном ходе решения решена значительная часть задачи |
| 5 | Верно «раскрыт» модуль или другое верное начало решения |
| 0 | Неверные рассуждения или записан только ответ. |

**Задача 5** (*20 баллов*). В $\triangle ABC$, $AA_1$ *и* $CC_1$ - высоты. Точка М - середина стороны $AB$ . Точка $K\in AA_1$ и делит ее в отношении 1:2, считая от точки А. Найти длину стороны $AC$, если длина отрезка $A_1C_1=5$ *и* $\angle A_1MK=90^0$.

**Решение.**




1) $\triangle KMA_1$ прямоугольный.

Пусть Е – середина

$KA_1\Rightarrow ME=\frac{1}{2}KA_1=EK=EA_1$

2) $\triangle AA_1B$ - прямоугольный.

М – середина $AB$ (по условию)

$\Rightarrow AM=MA_1\Rightarrow\triangle AMK=\triangle MA_1E$

$\Rightarrow MK=ME\Rightarrow MK=\frac{1}{2}KA_1\Rightarrow$

$\angle MA_1A=30^0\Rightarrow\angle MAA_1=30^0\Rightarrow$

*из* $\triangle AA_1B\ \ \angle ABA_1=60^0$

3) $\triangle AA_1B \sim \triangle CC_1B$ (по двум углам) $\Rightarrow \dfrac{BC_1}{BC} = \dfrac{BA_1}{BA} \Rightarrow \triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$

(по двум сторонам и углу между ними), где $k = \dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{BC_1}{BC} = \cos\angle ABC = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow AC = 2A_1C_1 = 10$$

**Ответ:** 10

| Баллы | Критерии |
|---|---|
| 20 | Решение верно. |
| 15 | Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна ошибка. |
| 10 | Найден угол А или угол В или доказано подобие треугольников. |
| 5 | Верно выполнен один из пунктов решения, в том числе использовано свойство медианы прямоугольного треугольника. |
| 0 | Решение не верно или отсутствует |

**Задача 6** (*20 баллов*). Малое предприятие производит комплекты пластиковых деталей и датчиков для измерительных приборов. В затраты на один комплект входит стоимость материалов, ежедневно закупаемых у фирмы-поставщика. Первого числа некоторого месяца эта стоимость составляла 1,975 тысяч рублей. В связи с сезонным снижением цен стоимость материалов уменьшается каждый день в течение месяца на одну и ту же величину по сравнению с предыдущим днем. Так, седьмого числа стоимость материалов будет 1,675 тысяч рублей. Стоимость одного комплекта равна стоимости материалов в данный день, умноженной на коэффициент k, (с помощью которого учитываются расходы на оплату труда работников, а также затраты на упаковку, этикетки, цены на которые зависят от валютного курса). В течение месяца можно считать, что k(t)=1+0,1t, где t – номер дня. Партия состоит из 40 комплектов, стоимость партии рассчитывается по ценам текущего дня. При оформлении заказа стоимость партии увеличивается на 20 %.

Для информирования заказчиков необходимо ответить на вопрос: в какой из 30 дней месяца стоимость партии будет наибольшей с учетом оформления заказа и чему она равна?

**Решение.**

Стоимость материалов уменьшается каждый день в течение месяца на одну и ту же величину по сравнению с предыдущим днем, поэтому стоимость материалов $S(t) = at + b$, где $t$ – номер дня, $S(1) = 1{,}975 = a + b$, $S(7) = 1{,}675 = 7a + b$. Получим $S(t) = -\dfrac{1}{20}t + \dfrac{81}{40} = \dfrac{1}{40}\cdot(81 - 2t)$.

Стоимость одного комплекта равна $S(t)\cdot k(t) = \dfrac{1}{40}\cdot(81-2t)\cdot\dfrac{1}{10}(10+t)$, где $t = 1, 2, \ldots, 30$.

Стоимость партии из 40 комплектов после оформления заказа $f(t) = 40\cdot 1{,}2\cdot S(t)\cdot k(t) = 40\cdot 1{,}2\cdot\dfrac{1}{40}\cdot(81-2t)\cdot\dfrac{1}{10}(10+t)$.

Абсцисса вершины $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{81}{2} - 10\right) = \dfrac{61}{4} = 15\dfrac{1}{4}$. Наибольшее значение стоимости партии из 40 комплектов после оформления заказа равно $f(15) == 40\cdot 1{,}2\cdot\dfrac{1}{40}\cdot(81-30)\cdot\dfrac{25}{10} = 51\cdot 3 = 153$ тысячи рублей.

**Ответ:** 15 день, 153 тысячи рублей.

| Баллы | Критерии |
| --- | --- |
| 20 баллов | Полное обоснованное решение |
| 18 баллов | Допущена арифметическая ошибка на последнем этапе при верном ходе рассуждений |
| 15 баллов | Верно найден номер дня, в который стоимость заказа наибольшая. |
| 10 баллов | Верно составлено выражение для стоимости заказа. |
| 5 баллов | Верно составлено выражение для стоимости материалов. |
| 0 баллов | Неверные рассуждения или записан только ответ. |

Олимпиада: 5 февраля

Вариант: 2 Класс: 8

**Задача 1** (*15 баллов*). Акционеры, имеющие разные количества акций в активе, имеют, соответственно, разные права при обсуждении. Четверо акционеров делят 10 акций. Сначала обладатель наибольшего числа акций предлагает свой вариант раздела. Если более половины всех участников не согласны с представленным вариантом, то акционер, внесший предложение, выбывает из дальнейшего дележа и никаких акций не получает. Далее, тот из оставшихся, кто имеет наибольшее число акций, предлагает свой вариант раздела. Если его предложение отвергнут, то дележ акций продолжается для двух акционеров. Цель каждого - получить как можно больше акций. Как в итоге будут распределены акции? (Решение задачи предполагает разбор всех вариантов и обоснования).

**Решение.**

Если двое (10,0).Если трое 1)(10,0,0)-первый лишится всего;2) (9,1,0)-второй может отказаться и тогда (10,0);3)(9,0,1)-третий отказываться не будет, т.к. иначе не получит ничего. Если четверо:1)(10,0,0,0)-первые лишится всего;2)(9,1,0,0)-второй откажется и будет (9,0,1);3)(9,0,1,0)-третий не откажется, иначе получит 0;4)(9,0,0,1)-четвертый может и отказаться, т.к. для него ничего не изменится, значит , первого такой расклад не устроит.

**Ответ:** (9,0,1,0).

| Баллы | Критерии |
|---|---|
| 15 | Верное обоснованное решение |
| 10 | Верный ответ с недостатками обоснования. |
| 5 | Верный ответ, но рассмотрены не все случаи |

**Задача 2** (*15 баллов*). Решите уравнение. $16-4\left|3-x\right|^2-\left(x-3\right)^2\left(4-\left(x-3\right)^2\right)=\left(x^2-6x+9\right)^2$

**Решение.**

Замена $\left|3-x\right|^2=t$ .

$$16-4t-t\left(4-t\right)=t^2;\left(4-t\right)\left(4-t\right)=t^2;4-t=t\vee 4-t=-t;t=2;\left|x-3\right|=\sqrt{2};\ x=3\pm\sqrt{2}$$

**Ответ:** $x=3\pm\sqrt{2}$.

| Баллы | Критерии |
|---|---|
| 15 | Решение верно. |
| 10 | Верный ход решения, но допущена одна арифметическая ошибка. |
| 5 | Сделана замена переменной, решено уранение, но есть ошибки в применении формул или раскрытии модуля. |

**Задача 3** (*15 баллов*). В остроугольном $\triangle ABC$ точка $H$ - точка пересечения высот, точка О – центр вписанной окружности. Угол $AOB$ в $k$ раз больше угла $AHB$. Найти величину угла $ACB$. Какие значения может принимать коэффициент $k$?

**Решение.**

Обозначим $\angle ACB=\alpha$

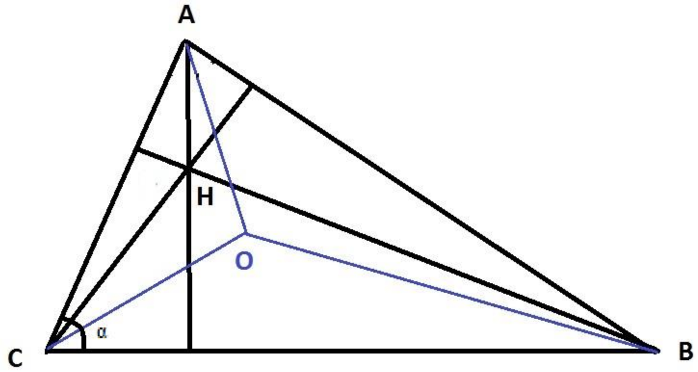
$$\angle AOB=180-\frac{180-\alpha}{2}=90+\frac{\alpha}{2}$$

$$\angle AHB=180-\alpha$$

$$k\cdot(180-\alpha)=90+\frac{\alpha}{2}$$

$$180\cdot k-90=k\cdot\alpha+\frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = \frac{180 \cdot (k - 1/2)}{k + 1/2}, k > 1/2$$



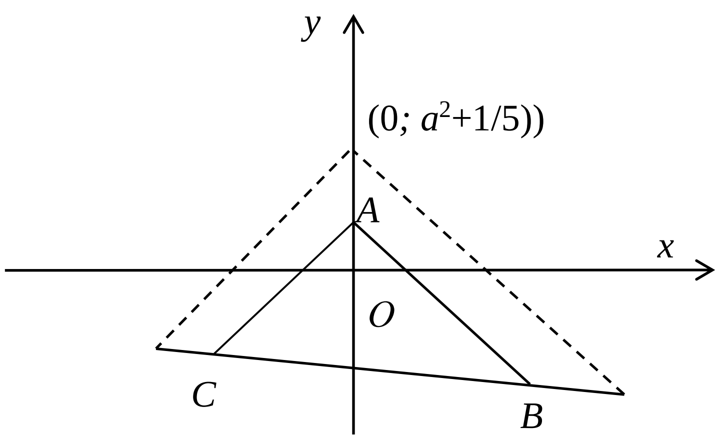

**<u>Ответ:</u>** $\angle ACB = \frac{180 \cdot (k - 1/2)}{k + 1/2}, k > 1/2$

| Баллы | Критерии |
|---|---|
| 15 | Решение верно. |
| 13 | Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна ошибка. |
| 5 | За правильно найденное значение каждого из углов: $\angle AOB$ или $\angle AHB$. |
| 0 | Решение не верно или отсутствует |

**Задача 4** (*15 баллов*). При каких значениях параметра *а* фигура, ограниченная графиками $y = a^2 + \frac{1}{5} - |x|$ и $5y + x = -9$ имеет наименьшую площадь? Найдите эту наименьшую площадь.

**Решение**.

Изобразим на плоскости $xOy$ графики, для $y = a^2 + \frac{1}{5} - |x|$ получаем при $x > 0,\ \ y = a^2 + \frac{1}{5} - x$, при $x < 0,\ \ y = a^2 + \frac{1}{5} + x$, при $x = 0,\ \ y = a^2 + \frac{1}{5}$. График показан на рисунке пунктиром. Самое нижнее положение точки пересечения с осью Оу будет при $a = 0$, это точка $A\left(0; \frac{1}{5}\right)$. Графиком $5y + x = -9$ будет прямая ВС. На прямой ВС при $x = 0,\ \ y = -\frac{9}{5}$, эта точка ниже $A\left(0; \frac{1}{5}\right)$, поэтому при любом значении параметра графики ограничивают треугольник. Наименьшее



значение площади будет при $a=0$, это площадь треугольника ABC с вершинами $A\left(0;\frac{1}{5}\right)$, $B\left(\frac{5}{2};-\frac{23}{10}\right)$, $C\left(-\frac{5}{3};-\frac{22}{15}\right)$.

Надо найти площадь прямоугольного треугольника ABC. Находим катеты $AB=\frac{5}{2}\sqrt{(-1)^2+1^2}=\frac{5}{2}\sqrt{2}, AC=\frac{5}{3}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\frac{5}{3}\sqrt{2}$, площадь равна $\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{25}{6}$.

**Ответ:** $a=0$, площадь $\frac{25}{6}$.

| Баллы | Критерии |
|---|---|
| 15 | Полное обоснованное решение |
| 12 | Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение. |
| 10 | При любом верном ходе решения решена значительная часть задачи |
| 5 | Верно «раскрыт» модуль или другое верное начало решения |
| 0 | Неверные рассуждения или записан только ответ. |

**Задача 5** (*20 баллов*). В $\triangle ABC$, $AA_1$ *и* $CC_1$ - высоты. Точка М - середина стороны $AB$. Точка $K\in AA_1$ и делит ее в отношении 1:2, считая от точки А.

Найти длину стороны $A_1C_1$, если длина отрезка $AC=14$ *и* $\angle A_1MK=90^0$.

**Решение.**

1) $\triangle KMA_1$ прямоугольный.

Пусть Е – середина

$KA_1\Rightarrow ME=\frac{1}{2}KA_1=EK=EA_1$

2) $\triangle AA_1B$ - прямоугольный.

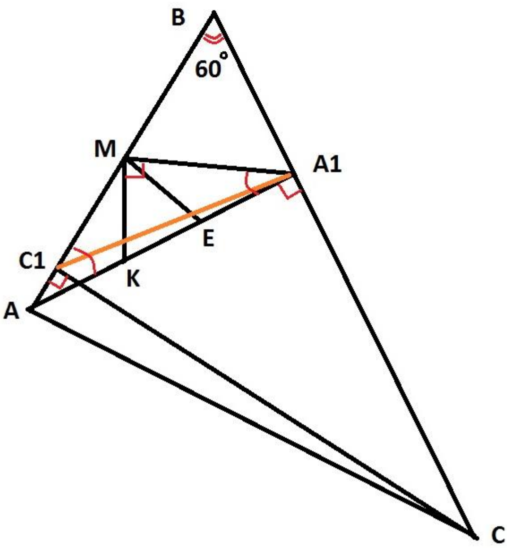
М – середина $AB$ (по условию)

$\Rightarrow AM=MA_1\Rightarrow\triangle AMK=\triangle MA_1E$

$\Rightarrow MK=ME\Rightarrow MK=\frac{1}{2}KA_1\Rightarrow$

$\angle MA_1A=30^0\Rightarrow\angle MAA_1=30^0\Rightarrow$

*из* $\triangle AA_1B$ $\angle ABA_1=60^0$




3) $\triangle AA_1B \sim \triangle CC_1B$ (по двум углам) $\Rightarrow\frac{BC_1}{BC}=\frac{BA_1}{BA}\Rightarrow\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$

(по двум сторонам и углу между ними), где $k=\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{BC_1}{BC}=\cos\angle ABC=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow A_1C_1=\frac{1}{2}AC=7$

**Ответ:** 7

| Баллы | Критерии |
|---|---|
| 20 | Решение верно. |
| 15 | Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна ошибка. |
| 10 | Найден угол A или угол B или доказано подобие треугольников. |
| 5 | Верно выполнен один из пунктов решения, в том числе использовано свойство медианы прямоугольного треугольника. |
| 0 | Решение не верно или отсутствует |

**Задача 6** (*20 баллов*). Малое предприятие производит комплекты пластиковых деталей и датчиков для измерительных приборов. В затраты на один комплект входит стоимость материалов, ежедневно закупаемых у фирмы-поставщика. Первого числа некоторого месяца эта стоимость составляла 2 тысячи рублей. В связи с сезонным снижением цен стоимость материалов уменьшается каждый день в течение месяца на одну и ту же величину по сравнению с предыдущим днем. Так, шестого числа стоимость материалов будет 1,75 тысяч рублей. Стоимость одного комплекта равна стоимости материалов в данный день, умноженной на коэффициент k, (с помощью которого учитываются расходы на оплату труда работников, а также затраты на упаковку, этикетки, цены на которые зависят от валютного курса). В течение месяца можно считать, что k(t)=1+0,08t, где t – номер дня. Партия состоит из 40 комплектов, стоимость партии рассчитывается по ценам текущего дня. При оформлении заказа стоимость партии увеличивается на 25 %.

Для информирования заказчиков необходимо ответить на вопрос: в какой из 30 дней месяца стоимость партии будет наибольшей с учетом оформления заказа и чему она равна?

**Решение.**

Стоимость материалов уменьшается каждый день в течение месяца на одну и ту же величину по сравнению с предыдущим днем, поэтому стоимость материалов $S(t)=at+b$, где $t$ – номер дня, $S(1)=2=a+b$, $S(6)=1{,}75=6a+b$. Получим $S(t)=-\frac{1}{20}t+\frac{41}{20}=\frac{1}{20}\cdot(41-t)$. Стоимость одного комплекта равна $S(t)\cdot k(t)=\frac{1}{20}\cdot(41-t)\cdot\left(1+\frac{2}{25}t\right)$, где $t=1,2,\ldots,30.$

Стоимость партии из 40 комплектов после оформления заказа $f(t)=40\cdot1{,}25\cdot S(t)\cdot k(t)=40\cdot1{,}25\cdot\frac{1}{20}\cdot(41-t)\cdot(25+2t)\cdot\frac{1}{25}$.

Абсцисса вершины $\frac{1}{2}\cdot\left(41-\frac{25}{2}\right)=\frac{57}{4}=14\frac{1}{4}$. Наибольшее значение стоимости партии из 40 комплектов после оформления заказа равно $f(14)==40\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{20}\cdot(41-14)\cdot(25+28)\frac{1}{25}=\frac{27\cdot53}{10}=143{,}1$ тысячи рублей.

**Ответ:** 14 день, 143,1 тысячи рублей.

| Баллы | Критерии |
|---|---|
| 20 | Полное обоснованное решение |
| 18 | Допущена арифметическая ошибка на последнем этапе при верном ходе рассуждений |
| 15 | Верно найден номер дня, в который стоимость заказа наибольшая. |
| 10 | Верно составлено выражение для стоимости заказа. |
| 5 | Верно составлено выражение для стоимости материалов. |
| 0 | Неверные рассуждения или записан только ответ. |