

вариант №1 (Математика - 11 класс)

1. Буквы в симметричном слове АРБУЗУЗУБРА случайно переставили так, что полученное слово отличается от исходного. С какой вероятностью это слово снова будет симметричным? Ответ запишите в виде несократимой дроби. (12 баллов)

2. На параболе $y = x^2$ даны две точки: A с абсциссой -3 и B с абсциссой 5 . Точка C лежит на дуге AB . Найдите максимальную возможную площадь треугольника ABC . (16 баллов)

3. В треугольник ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$ вписана окружность с центром в точке O , которая касается сторон AC и BC в точках M и N соответственно. На прямой MN отмечена точка K так, что угол OAK равен 60° . Найдите длину отрезка KN . (16 баллов)

4. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

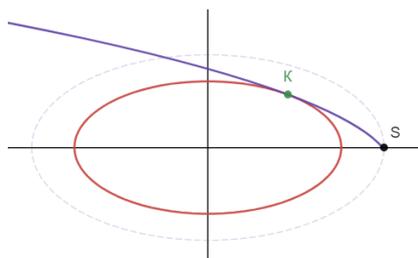
$$2\sqrt{x^2 + 324} - f(x) \geq \frac{x^2 + 324}{f(x) - a} - a \quad \text{имеет} \quad \text{единственное} \quad \text{решение,} \quad \text{если}$$

$$f(x) = \sqrt{g^2(x) - 400}, \quad g(x) = 19 + 2\cos 2x + 4\cos x. \quad (16 \text{ баллов})$$

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 2\sqrt{3}$, $AD = 4\sqrt{3}$ и углом A , равным 60° . Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO , где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, $SO = 1$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной медиане SE боковой грани SAB и проходящей через середину ребра SC и середину отрезка AO . (20 баллов)

6. За время освоения космического пространства на различных орбитах скопилось по данным NASA около 300 тысяч объектов космического мусора. Дальнейшее использование космического пространства в ближайшем будущем может быть существенно осложнено всё возрастающей угрозой столкновения с космическим мусором. Согласно результатам исследований, удаление 3-5 крупных объектов в год с низких околоземных орбит позволяет предотвратить цепную реакцию роста объектов космического мусора в будущем. На данный момент работающей технологией по утилизации космического мусора является увод старых спутников. Это можно сделать с помощью аппаратов-захватчиков, которые буксируют мусор на орбиты для захоронения.

Рассмотрим плоскость орбиты захоронения. Пусть крупный фрагмент мусора движется в этой плоскости по эллиптической орбите с большой полуосью равной 5000 км, малой – 2500 км. (Для удобства вычислений все расчеты будем производить в тысячах километров.) Введем систему координат с началом отсчета в центре рассматриваемого эллипса, с осью абсцисс, направленной вдоль большой полуоси. Тогда уравнение траектории движения обломка запишется следующим образом: $x^2 + 4y^2 = 25$.



На некотором удалении по оси абсцисс находится межпланетная научная станция S . С нее стартует летательный аппарат-захватчик, который движется по параболической траектории: $(y+1)^2 = -9 \cdot (x-7)/4$. Он должен совершить маневр по переходу с одной орбиты на другую и плавно подойти к обломку для изменения его скорости и направления движения.

Определите координаты точки касания указанных траекторий и угол, который образует с положительным направлением оси абсцисс касательная к параболической траектории в начальный момент времени в точке S . (20 баллов)

вариант №2 (Математика - 11 класс)

1. Буквы в симметричном слове МОЛОТЭТОЛОМ случайно переставили так, что полученное слово отличается от исходного. С какой вероятностью это слово снова будет симметричным? Ответ запишите в виде несократимой дроби. (12 баллов)

2. На параболе $y = x^2$ даны две точки: A с абсциссой -4 и B с абсциссой 8 . Точка C лежит на дуге AB . Найдите максимальную возможную площадь треугольника ABC . (16 баллов)

3. В треугольник ABC со сторонами $AB = 10$, $BC = 16$, $AC = 14$ вписана окружность с центром в точке O , которая касается сторон AC и BC в точках M и N соответственно. На прямой MN отмечена точка K так, что угол OAK равен 60° . Найдите площадь треугольника OAK . (16 баллов)

4. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

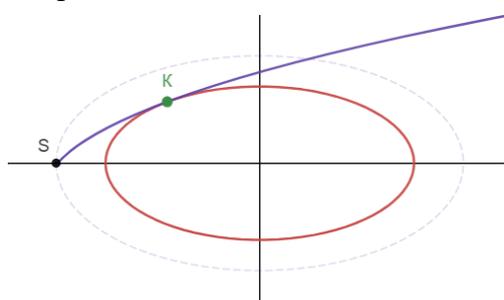
$$2\sqrt{x^2 + 100} - f(x) \geq \frac{x^2 + 100}{f(x) - a} - a \quad \text{имеет} \quad \text{единственное} \quad \text{решение,} \quad \text{если}$$

$$f(x) = \sqrt{g^2(x) - 120}, \quad g(x) = 7 + 2\cos 2x + 4\cos x. \quad (16 \text{ баллов})$$

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ с углом A , равным 60° , стороной $AD = 8\sqrt{3}$ и высотой, опущенной на эту сторону, равной 6 . Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO , где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, $SO = 2$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной медиане SE боковой грани SAB и проходящей через середину ребра SC и середину отрезка AO . (20 баллов)

6. За время освоения космического пространства на различных орбитах скопилось по данным NASA около 300 тысяч объектов космического мусора. Дальнейшее использование космического пространства в ближайшем будущем может быть существенно осложнено всё возрастающей угрозой столкновения с космическим мусором. Согласно результатам исследований удаление 3-5 крупных объектов в год с низких околоземных орбит позволяет предотвратить цепную реакцию роста объектов космического мусора в будущем. На данный момент работающей технологией по утилизации космического мусора является увод старых спутников. Это можно сделать с помощью аппаратов-захватчиков, которые буксируют мусор на орбиты для захоронения.

Рассмотрим плоскость орбиты захоронения. Пусть крупный фрагмент мусора движется в этой плоскости по эллиптической орбите с большой полуосью равной 5000 км, малой – 2500 км. (Для удобства вычислений все расчеты будем производить в тысячах километров.) Введем систему координат с началом отсчета в центре рассматриваемого эллипса, с осью абсцисс, направленной вдоль большой полуоси. Тогда уравнение траектории движения обломка



запишется следующим образом: $x^2 + 4y^2 = 25$.

На некотором удалении по оси абсцисс находится межпланетная научная станция S . С нее стартует летательный аппарат-захватчик, который движется по параболической траектории $(y + 1)^2 = 9 \cdot (x + 7) / 4$. Он должен совершить маневр по переходу с одной орбиты на другую и плавно подойти к

обломку, для изменения его скорости и направления движения.

Определите координаты точки касания указанных траекторий и угол, который образует с положительным направлением оси абсцисс касательная к параболической траектории в начальный момент времени в точке S . (20 баллов)