



**Профиль олимпиады:
«Математика»**

Класс участия: 10

Вариант задания: 1

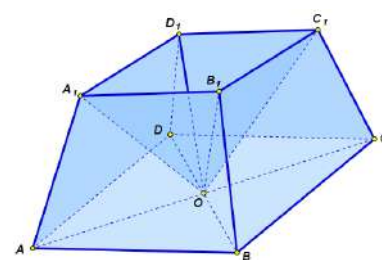
Задача 1 (12 баллов). Пусть a, b, c – корни многочлена $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$. Найдите $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$.

Задача 2 (16 баллов). Даны 5 карточек с буквами Л, И, М, О, Н и ещё n карточек с буквой А. Найдите все n , при которых вероятность того, что из 4 случайно выбранных карточек будет можно сложить слово ЛАМА, получится максимальной.

Задача 3 (16 баллов). Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB=3$, $BC=4$, $CD=6$ и $AD=2$ вписан в окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке E , а прямые BC и AD пересекаются в точке F . Биссектриса угла CFD пересекает стороны AB и CD в точках K и L соответственно, а биссектриса угла BEC пересекает стороны AD и BC в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка EF и площадь четырёхугольника $KMLN$.

Задача 4 (16 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых система
$$\begin{cases} |x-a| + |y-a| + |a-x+1| + |a-y+1| \leq 2, \\ y+2|x^2-2x-3| = 6, \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

Задача 5 (20 баллов). В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона нижнего основания $ABCD$ равна 4, верхнего основания $A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 1, точка O – центр основания $ABCD$. Поверхность многогранника Φ состоит из квадрата $ABCD$, боковых граней пирамиды $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и боковых граней пирамиды $OA_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите площадь сечения многогранника Φ плоскостью, содержащей прямые AB и $C_1 D_1$, если расстояние от точки D до плоскости сечения равно $8\sqrt{14}/9$.



Задача 6 (20 баллов). См. на обороте листа.



Задача 6 (20 баллов). Дизайнер спроектировал офисное помещение с основанием в виде прямоугольного треугольника ABC , угол C прямой. С помощью потолочного освещения помещение разбито на зоны следующим образом: большой светильник P освещает площадь S , ограниченную окружностью, которая вписана в треугольник ABC . Если к этой окружности провести внутри треугольника ABC касательные, параллельные сторонам комнаты, то получатся еще три треугольника при вершинах A , B и C , в которые можно вписать маленькие окружности, ограничивающие площади S_A , S_B , S_C . Эти площади освещаются дополнительными светильниками P_A , P_B , P_C .

Найдите, радиусы всех окружностей и освещенность каждой зоны, если площадь треугольника равна $S_{ABC} = 240$ кв.м, гипотенуза $AB = 34$ м, величина угла BAC меньше величины угла CBA , а показатели световой отдачи (яркости) светильника P составляет 51840 лм, светильника P_A – 28512 лм, светильника P_B – 5670 лм и светильника P_C – 1620 лм.

Освещенность E_x площади S_x светильником P_x с показателем световой отдачи F_x рассчитывается по формуле $E_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_x}{S_x}$ (лк), где $\frac{1}{2}$ – поправочный коэффициент, лк – люкс, лм – люмен.



**Профиль олимпиады:
«Математика»**

Класс участия: 10

Вариант задания: 2

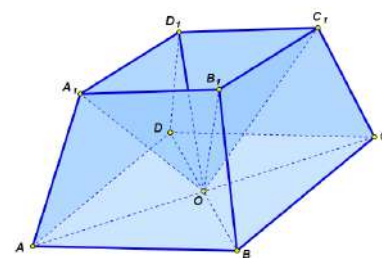
Задача 1 (12 баллов). Пусть a, b, c – корни многочлена $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 2$. Найдите $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$.

Задача 2 (16 баллов). Даны 5 карточек с буквами П, И, Р, О, Г и ещё n карточек с буквой А. Найдите все n , при которых вероятность того, что из 4 случайно выбранных карточек будет можно сложить слово ПАРА, получится максимальной.

Задача 3 (16 баллов). Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4,5$, $BC=6$, $CD=9$ и $AD=3$ вписан в окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке E , а прямые BC и AD пересекаются в точке F . Биссектриса угла CFD пересекает стороны AB и CD в точках K и L соответственно, а биссектриса угла BEC пересекает стороны AD и BC в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка EF и площадь четырёхугольника $KMLN$.

Задача 4 (16 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых система
$$\begin{cases} |x+1-a| + |y-a-2| + |a-x| + |a-y+3| \leq 2, \\ y+2|x^2-4| = 8, \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

Задача 5 (20 баллов). В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона нижнего основания $ABCD$ равна 48, верхнего основания $A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 8, точка O – центр основания $ABCD$. Поверхность многогранника Φ состоит из квадрата $ABCD$, боковых граней пирамиды $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и боковых граней пирамиды $OA_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите площадь сечения многогранника Φ плоскостью, содержащей прямые AB и $C_1 D_1$, если расстояние от точки C до плоскости сечения равно $64\sqrt{2}/3$.



Задача 6 (20 баллов). См. на обороте листа.



Задача 6 (20 баллов). Дизайнер спроектировал офисное помещение с основанием в виде прямоугольного треугольника ABC , с гипотенузой AB . С помощью потолочного освещения помещение разбито на зоны следующим образом: большой светильник P освещает площадь S , ограниченную окружностью, которая вписана в треугольник ABC . Если к этой окружности провести внутри треугольника ABC касательные, параллельные сторонам комнаты, то получатся еще три треугольника при вершинах A , B и C , в которые можно вписать маленькие окружности, ограничивающие площади S_A , S_B , S_C . Эти площади освещаются дополнительными светильниками P_A , P_B , P_C .

Найдите, радиусы всех окружностей и освещенность каждой зоны, если периметр треугольника равен $P_{ABC} = 90$ м, гипотенуза $AB = 39$ м, величина угла BAC меньше величины угла CBA , а показатели световой отдачи (яркости) светильника P составляет 51840 лм, светильника P_A – 40192 лм, светильника P_B – 3600 лм и светильника P_C – 1440 лм.

Освещенность E_x площади S_x светильником P_x с показателем световой отдачи F_x рассчитывается по формуле $E_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_x}{S_x}$ (лк), где $\frac{1}{2}$ - поправочный коэффициент, лк – люкс, лм – люмен.