



**Профиль олимпиады:
«Математика»**

Класс участия: 11

Вариант задания: 1

Задача 1 (12 баллов). Пусть $x = \log_3 5$, $y = \lg 12$. Представьте $\log_2 5$ в виде рационального выражения, составленного из натуральных чисел, x и y (с использованием скобок и знаков арифметических действий $+$, $-$, $\cdot$, $:$).

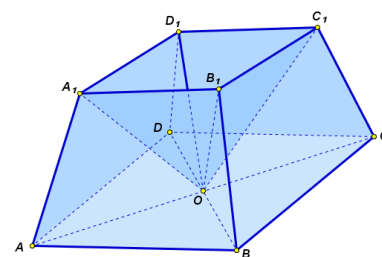
Задача 2 (16 баллов). Карточки с буквами П, О, Т, О, М, С, Т, В, О сложили в строку в случайном порядке. С какой вероятностью найдутся три карточки подряд, образующие слово ТОМ или ПОТ? Ответ запишите в виде несократимой дроби.

Задача 3 (16 баллов). Высота BH треугольника ABC является диаметром окружности, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Прямые, касающиеся этой окружности в точках D и E , пересекаются в точке F . Прямая BF пересекает сторону AC в точке K . Найдите отношение $AK:KC$ и длины отрезков DF и BK , если $BH=12$, $AD=25/13$, $CE=27/5$.

Задача 4 (16 баллов). Для каждого значения параметра a решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{(x^2 - 4x + 5 - a)(x - a + 1)}{\sqrt{9 - x}} > 0, \\ \log_{(x^2 - 4x)/5} a \leq 1. \end{cases}$$

Задача 5 (20 баллов). В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона нижнего основания $ABCD$ равна 24, верхнего основания $A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 12, высота пирамиды $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна $24\sqrt{2/5}$, точка O – центр основания $ABCD$. Поверхность многогранника Φ состоит из квадрата $ABCD$, боковых граней пирамиды $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и боковых граней пирамиды $OA_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите площадь сечения многогранника Φ плоскостью, проходящей через точки D , C_1 и середину ребра $A_1 B_1$.



Задача 6 (20 баллов). См. на обороте листа.

Профиль олимпиады:
«Математика»

Задача 6 (20 баллов). Сотовая связь – это целый мир возможностей. Но чтобы пользоваться ими, нужно быть в зоне действия базовой станции. Сети GSM (2G) имеют мощность, которая позволяет покрывать территорию радиусом до 35 километров на открытой местности. В городских условиях, где много зданий, зона приема сигнала значительно уменьшается. Сети 3G и 4G (LTE) работают на более высоких частотах, чем сети 2G, и их сигнал хуже проникает сквозь препятствия и больше подвержен помехам. В сетях GSM было достаточно нескольких вышек, чтобы покрывать большие территории, а для 3G и 4G сетей для обеспечения надежной связи требуется больше вышек.

В городе установлен ретранслятор GSM сети, который обеспечивает покрытие в пределах окружности радиусом $R = 24$ км. Центр окружности – основание вышки. Однако из-за особенностей рельефа зона покрытия этого ретранслятора ограничена хордой, проведенной внутри этой окружности. Хорда находится на расстоянии $d = 3$ км от центра окружности.

В меньшем сегменте, образованном хордой, необходимо установить два дополнительных ретранслятора (3G вышки) так, чтобы их зоны покрытия касались друг друга, хорды и основной окружности. Каждый из этих ретрансляторов имеет круговую зону покрытия одинакового радиуса r .

Найдите радиусы зон покрытия двух дополнительных ретрансляторов, которые нужно установить в меньшем сегменте. Определите площадь части меньшего сегмента, которая не попадает в зону действия дополнительных ретрансляторов.



**Профиль олимпиады:
«Математика»**

Класс участия: 11

Вариант задания: 2

Задача 1 (12 баллов). Пусть $x = \log_3 15$, $y = \lg 12$. Представьте $\log_2 3$ в виде рационального выражения, составленного из натуральных чисел, x и y (с использованием скобок и знаков арифметических действий $+$, $-$, $\cdot$, $:$).

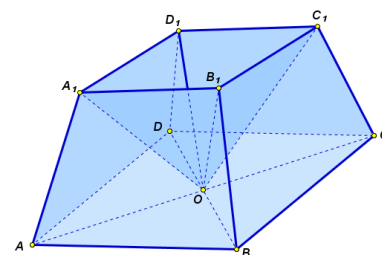
Задача 2 (16 баллов). Карточки с буквами П, О, Т, О, М, С, Т, В, А сложили в строку в случайном порядке. С какой вероятностью найдутся три карточки подряд, образующие слово ТОМ или ПОТ? Ответ запишите в виде несократимой дроби.

Задача 3 (16 баллов). Высота BH треугольника ABC является диаметром окружности, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Прямые, касающиеся этой окружности в точках D и E , пересекаются в точке F . Прямая BF пересекает сторону AC в точке K . Найдите отношение $AK : KC$ и длины отрезков DF и BK , если $BH = 6$, $AD = 25/26$, $CE = 32/5$.

Задача 4 (16 баллов). Для каждого значения параметра a решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{(x^2 - 4x + 6 - a)(a - x - 2)}{\sqrt{9 - x}} < 0, \\ \log_{(x^2 - 4x)/5} (a - 1)^3 \leq 3. \end{cases}$$

Задача 5 (20 баллов). В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона нижнего основания $ABCD$ равна 8, верхнего основания $A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 4, высота пирамиды $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна $8\sqrt{2/5}$, точка O – центр основания $ABCD$. Поверхность многогранника Φ состоит из квадрата $ABCD$, боковых граней пирамиды $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и боковых граней пирамиды $OA_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите площадь сечения многогранника Φ плоскостью, проходящей через точки D , C_1 и середину ребра $A_1 B_1$.



Задача 6 (20 баллов). См. на обороте листа.

Профиль олимпиады:
«Математика»

Задача 6 (20 баллов). Сотовая связь – это целый мир возможностей. Но чтобы пользоваться ими, нужно быть в зоне действия базовой станции. Сети GSM (2G) имеют мощность, которая позволяет покрывать территорию радиусом до 35 километров на открытой местности. В городских условиях, где много зданий, зона приема сигнала значительно уменьшается. Сети 3G и 4G (LTE) работают на более высоких частотах, чем сети 2G, и их сигнал хуже проникает сквозь препятствия и больше подвержен помехам. В сетях GSM было достаточно нескольких вышек, чтобы покрывать большие территории, а для 3G и 4G сетей для обеспечения надежной связи требуется больше вышек.

В городе установлен ретранслятор GSM сети, который обеспечивает покрытие в пределах окружности радиусом $R = 10$ км. Центр окружности – основание вышки. Однако из-за особенностей рельефа зона покрытия этого ретранслятора ограничена хордой, проведенной внутри этой окружности. Хорда находится на расстоянии $d = 2$ км от центра окружности.

В меньшем сегменте, образованном хордой, необходимо установить три дополнительных ретранслятора (3G вышки) с круговыми зонами покрытия так, чтобы две зоны имели одинаковый радиус и касались третьей зоны, а также чтобы все три зоны касались хорды и основной окружности.

Найдите радиусы зон покрытия трех дополнительных ретрансляторов, которые нужно установить в меньшем сегменте. Определите площадь части меньшего сегмента, которая не попадает в зону действия дополнительных ретрансляторов.