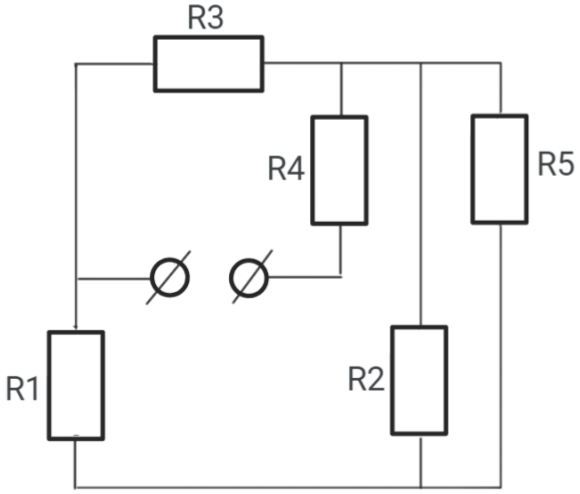
8 Класс. “Профессор Жуковский”. 1 вариант.
Задача 1. (10 баллов)
Расстояние от выхода из метро до корпуса МГТУ им Баумана, где проходит олимпиада “профессор Жуковский”, составляет 0,87 км. Олимпиада начинается в 10:00. В кабинете надо быть за пять минут до начала, а на гардероб и подъем к аудитории участнику потребуются дополнительные 10 минут. Средняя длина шага участника олимпиады составляет 75 см. Определите диапазон времени, во сколько участнику Олимпиады необходимо выйти из дверей метро, чтобы успеть вовремя и нигде не задерживаться. Известно, что самым быстрым темпом человек делает 116 шагов в минуту, а самый медленный темп походки составляет 58 шагов в минуту.
Решение:
1) Определим, во сколько участнику необходимо быть у входа в здание Олимпиады. Для этого вычтем из конечного времени 15 минут.
10:00 - 15 минут = 9:45.
2) Определим, сколько шагов необходимо сделать участнику, чтобы добраться до Олимпиады. Для этого поделим расстояние от метро до корпуса МГТУ на длину одного шага, не забыв перевести размерности в СИ:
$n = \frac{L}{l} = \frac{870}{0,75} = 1160$ шагов.
3) Определим время, которое он затратит при движении быстрым темпом. Для этого поделим количество шагов на число шагов в минуту:
$t_1 = \frac{1160}{116} = 10$ минут.
Аналогично определим время при движении медленным темпом:
$t_2 = \frac{1160}{58} = 20$ минут.
4) Определим диапазон времени выхода из метро:.
9:45 - 20 минут = 9:25
9:45 - 10 минут = 9:35
Получившийся диапазон времени выхода из метро 9:25 - 9:35.
Ответ: 9:25 - 9:35.
Критерии:

Правильно записана формула определения количества шагов.	2 балла
Правильно записана формула времени движения.	3 балла
Приведены необходимые математические преобразования и получен верный численный ответ.	5 баллов
ИТОГО:	**10 баллов.**

Задача 2. (15 баллов)
Из пяти нагревательных элементов собрали схему, указанную на рисунке. Элементы 1 и 3 опущены в заполненный водой калориметр объемом 450 мл, а остальные элементы нагревают 3940 г льда. Определите, какая часть льда растает к моменту закипания воды, если к цепи приложено постоянное напряжение U = 220 В. До включения вся система долгое время находилась при температуре 0°C. Известно, что сопротивление каждого нагревательного элемента, кроме четвертого, равняется 12 Ом. Сопротивление четвертого нагревательного элемента равняется 14.8 Ом. Удельная теплоемкость воды 4160 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, удельная теплота плавления льда 300 $\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$, плотность воды 1000 кг/м^3. Теплоемкостью нагревательных элементов и нагревом окружающей среды

пренебречь. Считать сопротивление нагревательных элементов при изменении температуры постоянным.



Решение:

Рассчитаем общее сопротивление цепи:

Сопротивления R2 и R5 подключены параллельно друг другу и последовательно резистору R1. Элемент R3 подключен параллельно R1, R2 и R5. R4 подключен ко всем последовательно.

Таким образом, суммарное сопротивление цепи $R_0 = \frac{(R_1 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5})R_3}{R_3 + R_1 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}} + R_4 = 22$ Ом.

Найдем силу тока, протекающую по цепи, и затем — распределение всех токов и напряжений:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_o} = 10 \text{ А } = I_4 = I_{125}$$

$$U_4 = I_4 R_4 = 148 \text{ В}.$$

$$U_3 = U_{125} = U_0 - U_4 = 72 \text{ В } => I_3 = \frac{U_3}{R_3} = 6 \text{ А}$$

$I_1 = I_0 - I_3 = 4 \text{ А } = I_{25} => U_1 = I_1 R_1 = 48 \text{ В}$

Т.к. R2 = R5, то: $I_2 = I_5 = \frac{I_{25}}{2} = 2 \text{ А} => U_2 = U_5 = I_5 R_5 = 24 \text{ В}$

Теперь мы знаем распределение всех токов и напряжений. Нам не составит труда по закону Джоуля-Ленца записать тепловую мощность, выделяемую на каждом нагревательном элементе:

$$P_1 = I_1 U_1 = 192 \text{ Вт}$$
$$P_2 = I_2 U_2 = 48 \text{ Вт}$$
$$P_3 = I_3 U_3 = 432 \text{ Вт}$$
$$P_4 = I_4 U_4 = 1480 \text{ Вт}$$
$$P_5 = I_5 U_5 = 48 \text{ Вт}$$

Запишем законы сохранения энергии:

(1) $cm_{\text{в}} \Delta t = P_1 \tau + P_3 \tau$

(2) $\lambda m_{\text{л}} = P_5 \tau + P_2 \tau + P_4 \tau$

Из первого уравнения найдем время:

$\tau = \frac{cm_{\text{в}} \Delta t}{P_1 + P_3} = 300$ с.

Подставим во второе и найдем массу растаявшего льда:

$$m_{\text{л}} = \frac{(P_5 + P_2 + P_4)\tau}{\lambda} = 1.576 \text{ кг}.$$

Найдем, какая это часть от всей массы льда:

$$k = \frac{m_{\text{л}}}{M} = 0.4$$

Ответ: 0,4.

Критерии:

Правильно записаны формулы нахождения сопротивлений на последовательном и параллельном участках цепи	1 балл
Верно составлена эквивалентная цепь	2 балла
Правильно найдено общее сопротивление	2 балла
Правильно записана формула мощности тока	1 балл
Правильно записан закон Ома для участка цепи	1 балл
Правильно записаны законы сохранения энергии	3 балла
Приведены необходимые математические преобразования и получен верный численный ответ	5 баллов
ИТОГО:	**15 баллов.**

Задача 3. (15 баллов)
После проведения в школе фестиваля занимательной физики у преподавателей осталось много абсолютно одинаковых конструкторов. В каждом из них, помимо прочего оборудования, находилось по несколько пружин с одинаковой жесткостью и длиной. Забавы ради, они решили собрать из этих пружин следующую конструкцию. Одну пружину прикрепили к крюку на потолке, затем к этой пружине была прикреплена доска и к этой доске – уже две параллельные пружины. Таким образом, увеличивая в каждом ряду количество пружин в два раза, добились того, что последним шел ряд из 32 пружин. Его прикрепили к последней доске и стали вертикально растягивать всю конструкцию с некой силой. Определите, на сколько сможет сместиться край растягиваемой конструкции, если весом всех досок и пружин можно пренебречь, а все доски в процессе растяжения оставались строго параллельны друг другу? Известно, что отношение растягивающей силы к жесткости одной пружины равняется α = 32 см.
Решение:
Запишем формулу закона Гука:

$$F = k\Delta l$$

При соединении пружин параллельно их жесткости складываются $k_о = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.
При соединении последовательно $\frac{1}{k_о} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n}$.
Учтем, что $\alpha = \frac{F}{k} => \frac{1}{k} = \frac{\alpha}{F}$.
Запишем формулу нахождения общего коэффициента жесткости последовательного соединения шести рядов пружин:
$\frac{1}{k_о} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6}$.
Подставим жесткость каждого ряда:

$$\frac{1}{k_о} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2^1 k} + \frac{1}{2^2 k} + \frac{1}{2^3 k} + \frac{1}{2^4 k} + \frac{1}{2^5 k}$$

Вынесем k и подставим закон Гука для всей конструкции:

$$\frac{L}{F} = \frac{1}{k}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5})$$

Подставим условие задачи и приведем к общему знаменателю сумму дробей в скобках:

$$\frac{L}{F} = \frac{\alpha}{F}(\frac{2^5}{2^5} + \frac{2^4}{2^5} + \frac{2^3}{2^5} + \frac{2^2}{2^5} + \frac{2}{2^5} + \frac{1}{2^5})$$

Сократим F, подставим α и найдем L:

$$L = \alpha(\frac{2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1}{2^5})$$

$L = 0.32\frac{63}{32} = 0.63$ метра.

Ответ: 63 см.

Критерии:

Верно записана формула закона Гука	2 балла
Верно записана формула для определения общей жесткости при последовательном соединении пружин	3 балла
Верно записана формула для определения общей жесткости при параллельном соединении пружин	3 балла
Приведены необходимые математические преобразования и получен верный численный ответ	7 баллов
ИТОГО:	**15 баллов**

Задача 4. (20 баллов)

В цилиндрическом калориметре с водой, полностью исключающем взаимодействие с окружающей средой, находится цилиндр льда, примерзший ко дну и стенкам так, что свободное место в калориметре есть только над гладкой поверхностью льда. Высота цилиндра льда составляет h = 0,8H от высоты внутреннего объема калориметра. Температура льда в калориметре равна 0°С. В калориметр вливают воду температурой 54°С. Дожидаются установления теплового равновесия, после чего всю воду удаляют. Определите, после какого наименьшего целого числа выливаний воды калориметр окажется пустым. Теплоемкостью калориметра пренебречь. Удельная теплоемкость воды 4200 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, удельная теплота плавления льда 0,3 $\frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$, плотность воды 1000 кг/м^3, плотность льда 900 кг/м^3.

Решение:

Учтем, что необходимо вливать воду до краев, так как только так число переливаний окажется наименьшим. Запишем уравнение теплового баланса:

$\lambda m_л = c m_в \Delta t$, где $m_л$ - масса растаявшего льда после одного переливания. Тогда:

$$\lambda \rho_л V_л = c \rho_в V_в \Delta t$$
$$\lambda \rho_л S h_л = c \rho_в S h_в \Delta t$$

Пусть k - отношение высоты растаявшего льда к высоте столба воды до начала теплообмена. Тогда:

$$\lambda \rho_л S k h_в = c \rho_в S h_в \Delta t$$
$$k = \frac{c \rho_в \Delta t}{\lambda \rho_л} = 0{,}84$$

Получается, что после установления теплового баланса растает слой льда высотой в 0,84 от высоты слоя воды.

После каждого выливания воды в калориметре освободится место, чтобы залить $f = f_0H + kf_0H = Hf_0(1+k)$, где f_0 - начальное отношение высоты свободного места к высоте калориметра.
Тогда после первого выливания освободится место:
$$f_1 = Hf_0(1+k) = H \cdot 0.2(1+0.84)) = 0.368H$$
После второго:
$$f_2 = Hf_1(1+k) = H \cdot 0.368 \cdot 1.84 = 0.67712H$$
После третьего:
$$f_3 = Hf_2(1+k) = H \cdot 0.67712 \cdot 1.84 \approx 1{,}25H$$
Расчеты показывают, что когда третий раз зальют воду, то ее внутренней энергии хватит на то, чтобы растопить больше льда, чем останется в калориметре.
В итоге потребуется третий раз вылить воду, чтобы калориметр оказался пустым.
Ответ: 3 раза.
Критерии:

Верно записано уравнения теплового баланса при одном переливании	4 балла
Верно найдено и пояснено количественное отношение параметров после одного переливания, необходимое для решения задачи	6 баллов
Приведены необходимые математические преобразования и получен верный численный ответ	10 баллов
ИТОГО:	**20 баллов**

Задача 5. (20 баллов)
На испытательном полигоне проверяли новый материал для производства современных транспортных средств. Полый твердый куб, из которого полностью откачали воздух, помещали в различные среды. Если полностью поместить этот куб в воду, то сила, которую необходимо будет приложить к кубу для его удержания под водой была на ΔT = 16 кН больше, чем для удержания под поверхностью спирта. Известно, что в опыте со спиртом куб полностью погрузили в доверху залитый резервуар и перестали удерживать. Тогда он поднялся к крышке и стал оказывать на нее давление одной гранью, равное P = 824 Па. Определите толщину стенок куба. Известно, что плотность материала ρ = 2800 кг/м^3, плотность воды ρ_1 = 1000 кг/м^3, плотность спирта ρ_2 = 800 кг/м^3. Ускорение свободного падения принять за 10 м/с^2.
Решение.
Определим длину ребра куба. Для этого запишем условие равновесия куба под водой и в спирте.
Составим уравнения для каждого случая:
$$T_1 = F_{A1} - mg$$
$$T_2 = F_{A2} - mg$$
Подставим силу Архимеда:
$$T_1 = \rho_1 g a^3 - mg$$
$$T_2 = \rho_2 g a^3 - mg$$
Вычтем из первого уравнения второе:

$$\Delta T = (\rho_1 - \rho_2)ga^3$$

Получим формулу для расчета стороны куба и для удобства сразу посчитаем ее:

$a = \sqrt[3]{\frac{\Delta T}{(\rho_1 - \rho_2)g}} = \sqrt[3]{\frac{16000}{(1000-800)10}} = 2$ метра.

Теперь запишем формулу давления куба на крышку резервуара со спиртом:

$$P = \frac{F_{A2} - mg}{S}$$

Подставим силу Архимеда:

$$Pa^2 = \rho_2 ga^3 - mg$$

Учтем, что куб полый с толщиной стенок d и длиной внешнего ребра a. Тогда запишем, что из куба "вырезан" куб со стороной b, равной a - 2d:

$$Pa^2 = \rho_2 ga^3 - \rho(a^3 - b^3)g$$

$$Pa^2 = \rho_2 ga^3 - \rho(a^3 - (a-2d)^3)g$$

$$\frac{Pa^2}{g} = \rho_2 a^3 - \rho(a^3 - (a-2d)^3)$$

$$a^3 - (a-2d)^3 = \frac{\rho_2 a^3 g - Pa^2}{g\rho}$$

$$\frac{a^3 g\rho - \rho_2 a^3 g + Pa^2}{g\rho} = (a-2d)^3$$

$$a - 2d = \sqrt[3]{\frac{a^3 g\rho - \rho_2 a^3 g + Pa^2}{g\rho}}$$

$$2d = a - \sqrt[3]{\frac{a^3 g\rho - \rho_2 a^3 g + Pa^2}{g\rho}}$$

$d = (a - \sqrt[3]{\frac{a^3 g\rho - \rho_2 a^3 g + Pa^2}{g\rho}})/2 = (2 - \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 10 \cdot 2800 - 800 \cdot 2^3 \cdot 10 + 824 \cdot 2^2}{10 \cdot 2800}})/2 = 0.1$ метра

Ответ: 10 сантиметров.

Критерии:

Верно записана формула силы Архимеда	2 балла
Верно записаны условия равновесия тела	3 балла
Верно найдена длина ребра куба	3 балла
Верно записана формула давления куба на крышку резервуара	2 балла
Верно найдена сторона полости	3 балла
Приведены необходимые математические преобразования и получен верный численный ответ	7 баллов
ИТОГО	**20 баллов**

Ситуационные задачи
8 класс
Вариант 1

Для 3D-печати применяются термопласты (специальные полимерные материалы) с температурой плавления 90°С. Плотность материала 900 кг/м^3, удельная теплоемкость 3200 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления 590000 Дж/кг. Начальная температура термопласта 20°С.

Найдите тепловую мощность нагревателя, в котором осуществляется плавление термопласта, если принтер должен обеспечить печать со скоростью перемещения головки не менее 30 мм/с при диаметре сопла 0,5 мм.

Найдите полное время печати сплошной детали объемом 15 см^3, если доля времени непосредственно процесса печати составляет 65% от общего времени изготовления (включающего подготовительные операции) этого изделия.

Площадь круга вычисляется по формуле $S = \frac{\pi d^2}{4}$, где d – диаметр круга.

Решение:

Объемный расход материала равен произведению скорости печати u на площадь сечения сопла s:

$$v = u \cdot s = u \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 30 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{3{,}14 \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 5{,}89 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

Массовый расход равен произведению объемного расхода материала на его плотность ρ:

$$m = v \cdot \rho = \frac{\pi d^2}{4} \cdot u \cdot \rho = 5{,}89 \cdot 10^{-9} \cdot 900 = 53 \cdot 10^{-7} \text{ кг/с.}$$

Тепловая мощность идет на нагрев и плавление пластика

$$N = \frac{Q}{t} = m(c(T_{\text{пл}} - T_0) + r) = \frac{\pi d^2}{4} \cdot u \cdot \rho(c(T_{\text{пл}} - T_0) + r)$$
$$= 53 \cdot 10^{-7}(3200(90 - 20) + 590000) = 4{,}31 \text{ Вт.}$$

Время непосредственно печати равно отношению объема изделия к объемному расходу материала:

$$t = \frac{V}{v} = \frac{15 \cdot 10^{-6}}{5{,}89 \cdot 10^{-9}} = 2547 \text{ с} = 42{,}45 \text{ мин.}$$

Полное время печати

$$\tau = \frac{t}{0{,}65} = 3918 \text{ с} = 65{,}3 \text{ мин} = 1{,}088 \text{ ч} = 1\text{ч } 5 \text{ мин.}$$

Ответ: $N = 4{,}31$ Вт, $\tau = 1{,}088$ ч.

Критерии

Ситуационная задача

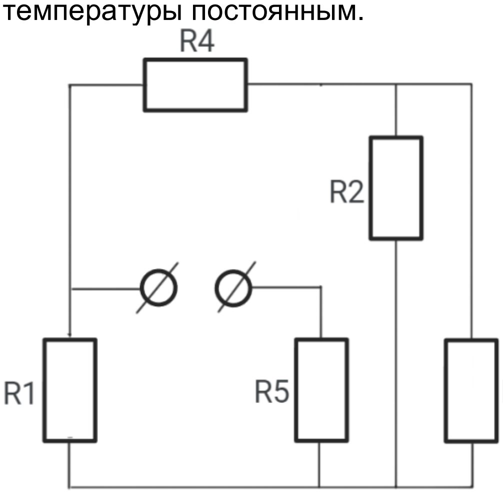
	Верные элементы решения	**Количество баллов**
1	Сформулирована расчётная схема (в том числе, графически), выделены и правильно формализованы все необходимые физические законы	0-5
2	Составлена система уравнений и математическая модель	0-5
3	Верно учтены технические параметры, характеристики и ограничения	0-5
4	Проведены расчеты, получен верный ответ, разумный с точки зрения физического смысла	0-5
	Итого	max 20

8 Класс. “Профессор Жуковский”. 2 вариант.
Задача 1. (10 баллов)
Средняя длина шага участника Олимпиады «Шаг в Будущее» составляет 70 см. Автобус прибывает на остановку в 9:10, и тогда участник может пойти спокойным темпом. Если автобус опоздает и прибудет в 9:28, то придется поторопиться. Известно, что Олимпиада начинается в 10:00, но у кабинета необходимо быть за пять минут до начала. На проход КПП, сдачу одежды в гардероб и подъем к кабинету участнику потребуются дополнительные 15 минут. Определите, какое минимальное число шагов в минуту может делать участник, если идет медленным темпом и какое максимальное, если пойдет быстро. Известно, что в процессе движения участник нигде не задерживается, а расстояние от остановки автобуса до КПП составляет ровно 1,05 километра.
Решение:
1) Определим, во сколько участнику необходимо быть у КПП для прохода в здание Олимпиады. Для этого вычтем из конечного времени 20 минут.
10:00 - 20 минут = 9:40.
2) Определим, сколько шагов необходимо сделать участнику, чтобы добраться до Олимпиады. Поделим расстояние от остановки до корпуса МГТУ на длину одного шага, не забыв перевести размерности в СИ:
$n = \frac{L}{l} = \frac{1050}{0,7} = 1500$ шагов.
3) Определим число шагов в минуту, которое он затратит при движении медленным темпом. Для этого сначала найдем время движения медленным темпом:
9:40 - 9:10 = 30 минут.
4) Теперь поделим общее количество шагов на время движения в минутах, если автобус прибудет рано:
$n_1 = \frac{1500}{30} = 50$ шагов в минуту.
5) Аналогично определим количество шагов в минуту, если автобус прибудет на остановку поздно и участнику придется торопиться:
9:40 - 9:28 = 12 минут.
$n_2 = \frac{1500}{12} = 125$ шагов в минуту.
Ответ: 50 шаг/мин и 125 шаг/мин.
Критерии:

Правильно определено время движения.	2 балла
Правильно записана формула определения количества шагов.	3 балла
Приведены необходимые математические преобразования и получен верный численный ответ.	5 баллов
ИТОГО:	**10 баллов.**

Задача 2. (15 баллов)
Из пяти нагревательных элементов собрали схему, указанную на рисунке. Элементы 1 и 4 опущены в заполненный водой калориметр объемом 450 мл, а остальные элементы нагревают 3940 г льда. Определите, какая часть льда останется в калориметре к моменту закипания воды, если к цепи приложено постоянное напряжение U = 220 В. До включения вся система долгое время находилась при температуре 0°C. Известно, что сопротивление каждого нагревательного элемента, кроме пятого, равняется 12 Ом. Сопротивление пятого нагревательного элемента равняется 14.8 Ом. Удельная теплоемкость воды 4160 $\frac{Дж}{кг \cdot К}$, удельная теплота плавления льда 300 $\frac{кДж}{кг}$, плотность воды

1000 кг/м^3. Теплоемкостью нагревательных элементов и нагревом окружающей среды пренебречь. Считать сопротивление нагревательных элементов при изменении температуры постоянным.



Решение:

Рассчитаем общее сопротивление цепи:

Сопротивления R2 и R3 подключены параллельно друг другу и последовательно резистору R4. Элемент R1 подключен параллельно R4, R2 и R3. R5 подключен ко всем последовательно.

Таким образом, суммарное сопротивление цепи $R_0 = \frac{(R_4+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3})R_1}{R_1+R_4+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}} + R_5 = 22$ Ом.

Найдем силу тока, протекающую по цепи, и затем — распределение всех токов и напряжений:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_o} = 10 \text{ А } = I_5 = I_{423}$$

$$U_5 = I_5R_5 = 148 \text{ В.}$$

$$U_1 = U_{423} = U_0 - U_5 = 72 \text{ В } \Rightarrow I_1 = \frac{U_1}{R_1} = 6 \text{ А}$$

$I_4 = I_0 - I_1 = 4 \text{ А } = I_{23} \Rightarrow U_4 = I_4R_4 = 48 \text{ В}$

Т.к. R2 = R5, то: $I_2 = I_3 = \frac{I_{23}}{2} = 2 \text{ А} \Rightarrow U_2 = U_3 = I_3R_3 = 24 \text{ В}$

Теперь мы знаем распределение всех токов и напряжений. Нам не составит труда по закону Джоуля-Ленца записать тепловую мощность, выделяемую на каждом нагревательном элементе:

$$P_1 = I_1U_1 = 432 \text{ Вт}$$

$$P_2 = I_2U_2 = 48 \text{ Вт}$$

$$P_3 = I_3U_3 = 48 \text{ Вт}$$

$$P_4 = I_4U_4 = 192 \text{ Вт}$$

$$P_5 = I_5U_5 = 1480 \text{ Вт}$$

Запишем законы сохранения энергии:

(1) $cm_{\text{в}}\Delta t = P_4\tau + P_1\tau$

(2) $\lambda m_{\text{л}} = P_3\tau + P_2\tau + P_5\tau$

Из первого уравнения найдем время:

$\tau = \frac{cm_{\text{в}}\Delta t}{P_4+P_1} = 300$ с.

Подставим во второе и найдем массу растаявшего льда:

$$m_{\text{л}} = \frac{(P_3 + P_2 + P_5)\tau}{\lambda} = 1.576 \text{ кг.}$$

Найдем, какая это часть от всей массы льда, и вычтем из единицы, чтобы получить часть оставшегося льда:

$$k = 1 - \frac{m_{\text{л}}}{M} = 1 - 0.4 = 0.6.$$

Ответ: 0,6.
Критерии:

Правильно записаны формулы нахождения сопротивлений на последовательном и параллельном участках цепи	1 балл
Верно составлена эквивалентная цепь	2 балла
Правильно найдено общее сопротивление	2 балла
Правильно записана формула мощности тока	1 балл
Правильно записан закон Ома для участка цепи	1 балл
Правильно записаны законы сохранения энергии	3 балла
Приведены необходимые математические преобразования и получен верный численный ответ	5 баллов
ИТОГО:	**15 баллов.**

Задача 3. (15 баллов)
После проведения в школе фестиваля занимательной физики у преподавателей осталось много абсолютно одинаковых конструкторов. В каждом из них, помимо прочего оборудования, находилось по несколько пружин с одинаковой жесткостью и длиной. Забавы ради, они решили собрать из этих пружин следующую конструкцию. Одну пружину прикрепили к крюку на потолке, к ней прикрепили невесомую палку и за нее зацепили две параллельные пружины. Затем снова палку и уже две последовательные пружины, к которым через следующую палку четыре параллельных пружины. Таким образом, увеличивая в два раза число последовательных и параллельных пружин, добились того, что последним шел ряд из 8 параллельных пружин. Его прикрепили к последней палке и стали вертикально растягивать всю конструкцию с некой силой. Определите, на сколько сможет сместиться край растягиваемой конструкции, если весом всех палок и пружин можно пренебречь, а все палки в процессе растяжения оставались строго параллельны друг другу? Известно, что отношение растягивающей силы к жесткости одной пружины равняется α = 8 мм.
Решение:
Запишем формулу закона Гука:

$$F = k\Delta l$$

При соединении пружин параллельно их жесткости складываются $k_0 = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.
При соединении последовательно $\frac{1}{k_0} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n}$.
Учтем, что $\alpha = \frac{F}{k} => \frac{1}{k} = \frac{\alpha}{F}$.
Выразим суммарную жесткость через последовательное соединение блоков параллельных и последовательных пружин:
$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{2}{k} + \frac{1}{4k} + \frac{4}{k} + \frac{1}{8k}$.
Вынесем k и подставим закон Гука для всей конструкции:

$$\frac{L}{F} = \frac{1}{k}(1 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{8})$$

Подставим условие задачи и приведем к общему знаменателю сумму дробей в скобках:

$$\frac{L}{F} = \frac{\alpha}{F}(7 + \frac{7}{8})$$

Сократим F, подставим α и найдем L:

$$L = \alpha(\frac{63}{8})$$

$L = 0.008\frac{63}{8} = 0.063$ метра.

Ответ: 63 мм.

Критерии:

Верно записана формула закона Гука	2 балла
Верно записана формула для определения общей жесткости при последовательном соединении пружин	3 балла
Верно записана формула для определения общей жесткости при параллельном соединении пружин	3 балла
Приведены необходимые математические преобразования и получен верный численный ответ	7 баллов
ИТОГО:	**15 баллов**

Задача 4. (20 баллов)

В термостакане расположен цилиндрический кусок льда, который застрял у дна и стенок так, что свободное пространство в термостакане доступно только сверху от льда. Высота этого ледяного цилиндра составляет h = 0,9H от общей внутренней высоты термостакана. Начальная температура льда составляет 0°C. В термостакан до краев заливают воду с температурой 54°C, затем ожидают установления теплового равновесия, после чего выливают всю воду. Определите, сколько раз нужно будет залить воду в стакан, чтобы после последнего выливания воды он оказался пустым. Теплоемкостью термостакана пренебречь. Считать, что он обеспечивает полную теплоизоляцию и исключает теплообмен с окружающей средой. Удельная теплоемкость воды равна 4200 Дж/кг·К, удельная теплота плавления льда – 0,3 МДж/кг, плотность воды – 1000 кг/м³, плотность льда – 900 кг/м³.

Решение:

Запишем уравнение теплового баланса:

$\lambda m_л = c m_в \Delta t$, где $m_л$ - масса растаявшего льда после одного переливания. Тогда:

$$\lambda \rho_л V_л = c \rho_в V_в \Delta t$$
$$\lambda \rho_л S h_л = c \rho_в S h_в \Delta t$$

Пусть k - отношение высоты растаявшего льда к высоте столба воды до начала теплообмена. Тогда:

$$\lambda \rho_л S k h_в = c \rho_в S h_в \Delta t$$
$$k = \frac{c \rho_в \Delta t}{\lambda \rho_л} = 0,84$$

Получается, что после установления теплового баланса растает слой льда высотой в 0,84 от высоты слоя воды.

После каждого выливания воды в калориметре освободится место, чтобы залить $f = f_0 H + k f_0 H = H f_0 (1 + k)$, где f_0 - начальное отношение высоты свободного места к высоте калориметра.

Тогда после первого выливания освободится место:

$$f_1 \; = Hf_0(1+k) \; = H \cdot 0.1(1+0.84)) = 0.184H$$

После второго:

$$f_2 \; = Hf_1(1+k) = H \cdot 0.368 \cdot 1.84 \approx 0.339H$$

После третьего:

$$f_3 = Hf_2(1+k) = H \cdot 0.339 \cdot 1.84 \approx 0{,}623H$$

После четвертого:

$$f_4 = Hf_3(1+k) = H \cdot 0.623 \cdot 1.84 \approx 1{,}14H$$

Расчеты показывают, что когда четвертый раз зальют воду, ее внутренней энергии хватит на то, чтобы растопить больше льда, чем останется в калориметре.

В итоге потребуется четвертый раз залить воду, чтобы после ее выливания калориметр оказался пустым.

Ответ: 4 раза.

Критерии:

Верно записано уравнения теплового баланса при одном переливании	4 балла
Верно найдено и пояснено количественное отношение параметров после одного переливания, необходимое для решения задачи	6 баллов
Приведены необходимые математические преобразования и получен верный численный ответ	10 баллов
ИТОГО:	**20 баллов**

Задача 5. (20 баллов)

На научном стенде испытывали новый композитный материал для будущих моделей подводной робототехники. Полый куб, из внутреннего пространства которого был полностью удален воздух, тестировали в разнообразных жидкостях. Когда параллелепипед полностью погружали в масло, необходимая сила для его удержания внутри жидкости оказалась на ΔT = 13,5 кН больше, чем при полном погружении в воду. В эксперименте с маслом куб полностью опустили в полный до краев контейнер и отпустили. Куб утонул и стал касаться своей нижней гранью дна контейнера. При этом, его вес стал равен 6100 Н. Требуется вычислить толщину стенок параллелепипеда. Плотность материала параллелепипеда ρ = 2500 кг/м^3, плотность воды $\rho 1$ = 1000 кг/м^3, плотность масла $\rho 2$ = 850 кг/м^3. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Решение.

Определим длину ребра куба. Для этого запишем условие равновесия куба под водой и в масле соответственно.

Составим уравнения для каждого случая:

$$T_1 = mg - F_{\text{A}1}$$
$$T_2 = mg - F_{\text{A}2}$$

Подставим силу Архимеда:

$$T_1 = mg - \rho_1 g a^3$$
$$T_2 = mg - \rho_2 g a^3$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$\Delta T = (\rho_1 - \rho_2) g a^3$$

Получим формулу для расчета стороны куба и для удобства сразу посчитаем ее:

$a = \sqrt[3]{\frac{\Delta T}{(\rho_1 - \rho_2) g}} = \sqrt[3]{\frac{13500}{(1000-850)10}} = 2{,}08$ метра.

Теперь запишем формулу веса тела на дно контейнера с маслом:

$$P = mg - F_{А2}$$

Подставим силу Архимеда:

$$P = mg - \rho_2 g a^3$$

Учтем, что куб полый с толщиной стенок d и длиной внешнего ребра a. Тогда запишем, что из куба “вырезан” куб со стороной b, равной a - 2d:

$$P = \rho(a^3 - b^3) g - \rho_2 g a^3$$

$$P = \rho(a^3 - (a-2d)^3) g - \rho_2 g a^3$$

$$\frac{P}{g} = \rho(a^3 - (a-2d)^3) - \rho_2 a^3$$

$$a^3 - (a-2d)^3 = \frac{\rho_2 a^3 g + P}{g\rho}$$

$$\frac{a^3 g\rho - \rho_2 a^3 g - P}{g\rho} = (a-2d)^3$$

$$a - 2d = \sqrt[3]{\frac{a^3 g\rho - \rho_2 a^3 g - P}{g\rho}}$$

$$2d = a - \sqrt[3]{\frac{a^3 g\rho - \rho_2 a^3 g - P}{g\rho}}$$

$d = \left(a - \sqrt[3]{\frac{a^3 g\rho - \rho_2 a^3 g - P}{g\rho}}\right)/2 = \left(2{,}08 - \sqrt[3]{\frac{9\cdot 10\cdot 2500 - 850\cdot 9\cdot 10 - 6100}{10\cdot 2500}}\right)/2 = 0{,}145$ метра

Ответ: 14,5 сантиметров.

Критерии:

Верно записана формула силы Архимеда	2 балла
Верно записаны условия равновесия тела	3 балла
Верно найдена длина ребра куба	3 балла
Верно записана формула давления куба на крышку резервуара	2 балла
Верно найдена сторона полости	3 балла
Приведены необходимые математические преобразования и получен верный численный ответ	7 баллов
ИТОГО	**20 баллов**

Вариант 2

Для 3D-печати применяются термопласты (специальные полимерные материалы) с температурой плавления 90°С. Плотность материала 900 кг/м^3, удельная теплоемкость 3200 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления 590000 Дж/кг. Начальная температура термопласта 20°С. Тепловая мощность нагревателя, в котором осуществляется плавление термопласта, равна 5 Вт.

Найдите массу сплошной детали, если полное время ее печати составляет 1 час 10 минут, а доля времени непосредственно процесса печати составляет 70% от общего времени изготовления (включающего подготовительные операции) этого изделия.

Найдите скорость перемещения головки, если для печати используется сопло диаметром 0,5 мм.

Площадь круга вычисляется по формуле $S = \frac{\pi d^2}{4}$, где $d -$ диаметр круга.

Решение:

Масса сплошной детали

$$M = m \cdot t,$$

где m – массовый расход материала, t – время непосредственно печати.

Тепловая мощность идет на нагрев и плавление пластика

$$N = \frac{Q}{t} = m(c(T_{\text{пл}} - T_0) + r),$$

тогда массовый расход материала

$$m = \frac{N}{c(T_{\text{пл}} - T_0) + r}.$$

Время непосредственно печати

$$t = \tau \cdot 0{,}7,$$

где τ – полное время печати.

Тогда масса детали

$$M = \frac{N \cdot \tau \cdot 0{,}7}{c(T_{\text{пл}} - T_0) + r} = \frac{5 \cdot 4200 \cdot 0{,}7}{3200(90 - 20) + 590000} = 0{,}018 \text{ кг}.$$

Объемный расход материала равен произведению скорости печати u на площадь сечения сопла s:

$$v = u \cdot s = u \cdot \frac{\pi d^2}{4}.$$

Массовый расход равен

$$m = v \cdot \rho = \frac{\pi d^2}{4} \cdot u \cdot \rho.$$

Тогда скорость головки

$$u = \frac{4m}{\rho\pi d^2} = \frac{4N}{\rho\pi d^2(c(T_{пл} - T_0) + r)}$$
$$= \frac{4 \cdot 5}{900 \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-3})^2(3200(90 - 20) + 590000)} = 0{,}035\,\frac{м}{с}$$
$$= 35\,\frac{мм}{с}.$$

Ответ: $M = 0{,}018$ кг, $u = 35\,\frac{мм}{с}$.

Критерии

Ситуационная задача

	Верные элементы решения	**Количество баллов**
1	Сформулирована расчётная схема (в том числе, графически), выделены и правильно формализованы все необходимые физические законы	0-5
2	Составлена система уравнений и математическая модель	0-5
3	Верно учтены технические параметры, характеристики и ограничения	0-5
4	Проведены расчеты, получен верный ответ, разумный с точки зрения физического смысла	0-5
	Итого	max 20