Решение варианта №1 (Инженерное дело - 10 класс)

1. Решите неравенство $\sqrt[8]{5-x^2} > x^3 + x - 9.$ (6 баллов)

Решение. ОДЗ: $5-x^2 \geq 0, x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}].$

Если $x \in [-\sqrt{5}; 0],$ то неравенство выполняется. Если $x \in [0; \sqrt{5}],$ то функция $f(x) = \sqrt[8]{5-x^2}$ непрерывна и убывает, а функция $g(x) = x^3 + x - 9$ непрерывна и возрастает. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение, таким решением является $x = 2.$ Для каждого $x \in [0; 2)$ имеем $f(x) = \sqrt[8]{5-x^2} > f(2) = 1,$ $g(x) = x^3 + x - 9 < g(2) = 1,$ и неравенство $\sqrt[8]{5-x^2} > x^3 + x - 9$ выполняется. Для каждого $x \in (2; \sqrt{5}]$ имеем $f(x) = \sqrt[8]{5-x^2} < f(2) = 1,$ $g(x) = x^3 + x - 9 > g(2) = 1,$ и неравенство $\sqrt[8]{5-x^2} > x^3 + x - 9$ не выполняется. Итак, неравенство выполняется, если $x \in [-\sqrt{5}; 2).$

Ответ: $[-\sqrt{5}; 2).$

2. Для определения веса арбуза, дыни и тыквы использовали неисправные электронные весы, которые показывали вес, отличающийся от истинного, но не более, чем на 0,5 кг в любую сторону (при этом при разных взвешиваниях отклонения показаний весов от истинного веса могли быть разными). Когда на весы положили арбуз и дыню вместе, то они показали 11,5 кг, совместный вес арбуза и тыквы оказался равным 13 кг, а дыни и тыквы – 12 кг. Когда взвесили арбуз, дыню и тыкву вместе, то весы показали 17 кг. Определите истинные веса арбуза, дыни и тыквы. (8 баллов)

Решение. Пусть *x*, *y*, *z* – массы арбуза, дыни и тыквы соответственно. Тогда

$$\begin{cases} 11 \leq x + y \leq 12, & (1) \\ 12,5 \leq x + z \leq 13,5, & (2) \\ 11,5 \leq y + z \leq 12,5 & (3) \\ 16,5 \leq x + y + z \leq 17,5, & (4) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(1)+(2)+(3) \Rightarrow 35 \leq 2(x+y+z) \leq 37, \Rightarrow 17,5 \leq x+y+z \Rightarrow (4)\ x+y+z = 17,5.$$

$$(1) \Rightarrow 11 \leq 17,5 - z \leq 12 \Rightarrow 5,5 \leq z \leq 6,5;$$

$$(2) \Rightarrow 12,5 \leq 17,5 - y \leq 13,5 \Rightarrow 4 \leq y \leq 5;$$

$$(3) \Rightarrow 11,5 \leq 17,5 - x \leq 12,5 \Rightarrow 5 \leq x \leq 6.$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 23,5 \leq 17,5 + x \leq 25,5 \Rightarrow 6 \leq x \leq 8 \Rightarrow x = 6;$$

$$(1)+(3) \Rightarrow 22,5 \leq 17,5 + y \leq 24,5 \Rightarrow 5 \leq y \leq 7 \Rightarrow y = 5;$$

$$(1)+(3) \Rightarrow 24 \leq 17,5 + z \leq 26 \Rightarrow 6,5 \leq z \leq 8,5 \Rightarrow z = 6,5.$$

Ответ: арбуз – 6 кг, дыня – 5 кг, тыква – 6,5 кг.

3. Для занятия по рисованию в группе детского сада имеется 36 карандашей. Артем схватил восемь карандашей, София – семь, Саша – шесть, Вика – пять, Миша – четыре, Аня – три, Ваня – два, Маша – один, а Максиму и Алисе карандашей не досталось. Дети случайно рассаживаются за двумя столами с пятью стульчиками у каждого. Какова вероятность, что при этом общее количество карандашей на каждом столе окажется одинаковым? (8 баллов)

Решение. Перенумеруем детей по количеству имеющихся у них карандашей: $0_1, 0_2$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. За элементарный исход эксперимента можно взять совокупность номеров детей, оказавшихся за первым столом (заполнение второго стола определяется автоматически):

$$\omega = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}, \quad i_j \in \{0_1, 0_2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad j = \overline{1,5}.$$

С точки зрения комбинаторики это сочетание без повторений 5 элементов из 10 элементов. Поэтому общее количество исходов равно $|\Omega| = |\{\omega\}| = C_{10}^5 = \frac{10!}{5!\,5!} = 252$. Для определенности будем указывать номера детей в сочетании в порядке возрастания:

$$\omega = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}, \quad i_1 \leqslant i_2 < i_3 < i_4 < i_5.$$

Пусть $A = \left\{\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\} : i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = \frac{36}{2} = 18\right\}$ — интересующая нас совокупность рассадок детей за первым столом. Очевидно, что при этом $\underline{i_1 \in \{0_1, 0_2, 1\}}$, поскольку при $i_1 \geqslant 2$ мы получили бы $i_1+i_2+i_3+i_4+i_5 \geqslant 2+3+4+5+6 = 20$. Аналогично очевидно, что $\underline{i_5 \in \{6, 7, 8\}}$, поскольку при $i_5 \leqslant 5$ мы получили бы $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 \leqslant 1+2+3+4+5 = 15$. Поэтому совокупность (событие) A является объединением следующих 9, вообще говоря несовместных (!),[1] событий:

$$A = (A_{i_1=0_1, i_5=6} \sqcup A_{i_1=0_1, i_5=7} \sqcup A_{i_1=0_1, i_5=8}) \cup (A_{i_1=0_2, i_5=6} \sqcup A_{i_1=0_2, i_5=7} \sqcup A_{i_1=0_2, i_5=8}) \sqcup$$

$$\sqcup (A_{i_1=1, i_5=6} \sqcup A_{i_1=1, i_5=7} \sqcup A_{i_1=1, i_5=8}).$$

Рассмотрим по отдельности эти события:

1) $A_{i_1=0_1, i_5=6} = \left\{\{0_1, i_2, i_3, i_4, 6\} : 0_1 \leqslant i_2 < i_3 < i_4 < 6;\ i_2 + i_3 + i_4 = 12\right\} \overset{(!)}{=\!=}$

$= \{0_1, \boxed{3, 4, 5}, 6\}, \quad |A_{i_1=0_1, i_5=6}| = \boxed{1}.$

2) $A_{i_1=0_1, i_5=7} = \left\{\{0_1, i_2, i_3, i_4, 7\} : 0_1 \leqslant i_2 < i_3 < i_4 < 7;\ i_2 + i_3 + i_4 = 11\right\} \overset{(!)}{=\!=}$

$= \{\{0_1, \boxed{0_2, 5, 6}, 7\},\ \{0_1, \boxed{1, 4, 6}, 7\},\ \{0_1, \boxed{2, 3, 6}, 7\},\ \{0_1, \boxed{2, 4, 5}, 7\}\};$

$|A_{i_1=0_1, i_5=7}| = \boxed{4}.$

3) $A_{i_1=0_1, i_5=8} = \left\{\{0_1, i_2, i_3, i_4, 8\} : 0_1 \leqslant i_2 < i_3 < i_4 < 8;\ i_2 + i_3 + i_4 = 10\right\} \overset{(!)}{=\!=}$

$= \{\{0_1, \boxed{0_2, 3, 7}, 8\},\ \{0_1, \boxed{1, 2, 7}, 8\},\ \{0_1, \boxed{0_2, 4, 6}, 8\},\ \{0_1, \boxed{1, 3, 6}, 8\}\};$

$= \{\{0_1, \boxed{1, 4, 5}, 8\},\ \{0_1, \boxed{2, 3, 5}, 8\}; \quad |A_{i_1=0_1, i_5=8}| = \boxed{6}.$

4), 5), 6) Аналогично:

[1] За счет того, что $\{0_1, 0_2\}$ и $\{0_2, 0_1\}$ — это одна и та же комбинация детей.

$|A_{i_1=0_2,i_5=6}| = \boxed{1}, \quad |A_{i_1=0_2,i_5=7}| = \boxed{4}, \quad |A_{i_1=0_2,i_5=8}| = \boxed{6}.$

7) $A_{i_1=1,i_5=6} = \{\{1, i_2, i_3, i_4, 6\} : 1 < i_2 < i_3 < i_4 < 6;\ i_2 + i_3 + i_4 = 11\} \overset{(!)}{=\!=}$

$= \{1, \boxed{2, 4, 5}, 6\}, \quad |A_{i_1=1,i_5=6}| = \boxed{1}.$

8) $A_{i_1=1,i_5=7} = \{\{1, i_2, i_3, i_4, 7\} : 1 < i_2 < i_3 < i_4 < 7;\ i_2 + i_3 + i_4 = 10\} \overset{(!)}{=\!=}$

$= \{1, \boxed{2, 3, 5}, 7\}, \quad |A_{i_1=1,i_5=7}| = \boxed{1}.$

9) $A_{i_1=1,i_5=8} = \{\{1, i_2, i_3, i_4, 8\} : 1 < i_2 < i_3 < i_4 < 8;\ i_2 + i_3 + i_4 = 9\} \overset{(!)}{=\!=}$

$= \{1, \boxed{2, 3, 4}, 8\}, \quad |A_{i_1=1,i_5=8}| = \boxed{1}.$

И учитывая, что исход (рассадки детей) $\{\boxed{0_1, 0_2}, 5, 6, 7\}$ из события $A_{i_1=0_1,i_5=7}$ очевидно повторяется в событии $A_{i_1=0_2,i_5=7}$, а исходы $\{\boxed{0_1, 0_2}, 3, 7, 8\}$, $\{\boxed{0_1, 0_2}, 4, 6, 8\}$ из события $A_{i_1=0_1,i_5=8}$ очевидно повторяется в событии $A_{i_1=0_2,i_5=8}$, получаем:

$$|A| = (1 + 4 + 6) + (1 + 4 + 6) + (1 + 1 + 1) - 3 = 22.$$

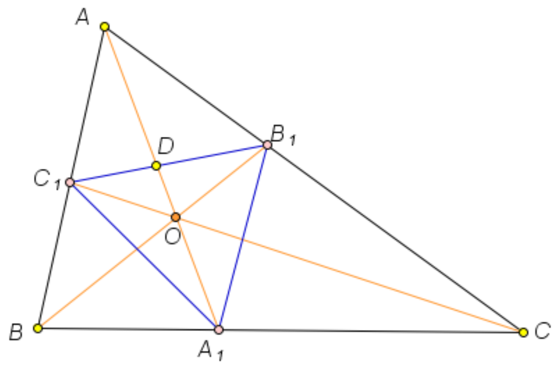
И тогда:

$$\mathbb{P}(A) \overset{(!)}{=\!=} \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{22}{252} = \frac{11}{126}.$$

Ответ: Искомая вероятность равна $\frac{11}{126}$.

4. Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников ABC и B_1OC_1, если $AB: BC: AC = 2: 3: 4$. (8 баллов)

Решение.



$$AB: BC: AC = 2: 3: 4,$$

$a = BC = 3x, b = AC = 4x,\ c = AB = 2x.$

По свойствам биссектрис имеем

$$AC_1 = \frac{bc}{a+b} = \frac{8x}{7}, \qquad BC_1 = \frac{ac}{a+b} = \frac{6x}{7},$$

$$AB_1 = \frac{bc}{a+c} = \frac{8x}{5}, \qquad CB_1 = \frac{ab}{a+c} = \frac{12x}{5},$$

$S_{C_1AB_1} = \frac{4}{7}\cdot\frac{2}{5}S_{ABC} = \frac{8}{35}S_{ABC}.$

По теореме Менелая для треугольника ABO имеем $\frac{OD}{DA}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BB_1}{OB_1} = 1$. Поскольку $\frac{BO}{OB_1} = \frac{5}{4}$, то

$\frac{OD}{DA} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9} = \frac{1}{3}$. Тогда $\frac{S_{C_1OB_1}}{S_{C_1AB_1}} = \frac{OD}{DA} = \frac{1}{3}$, $S_{C_1OB_1} = \frac{1}{3}S_{C_1AB_1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{35}S_{ABC} = \frac{8}{105}S_{ABC.}$

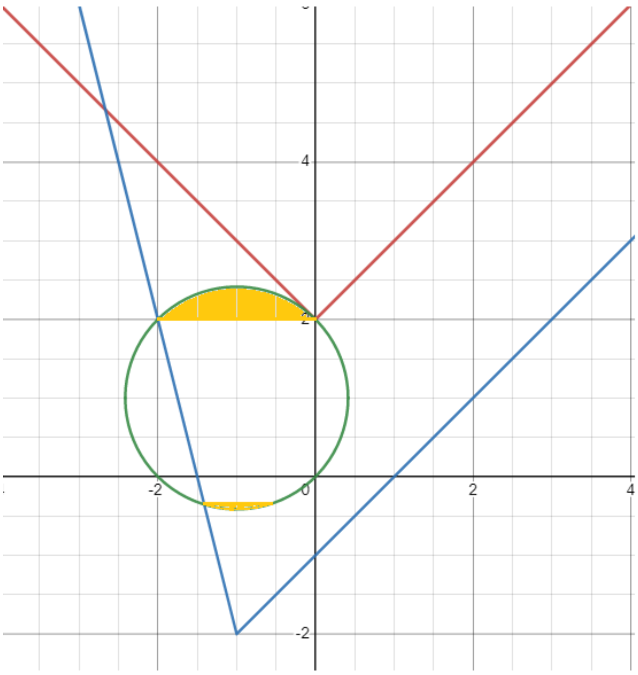
Ответ: $\frac{105}{8}$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x(x+2)\le a(2-a)$ имеет хотя бы одно решение, и каждое решение этого неравенства является также решением уравнения $\left|2a-5|x+1|+3x+7\right|+\left|a-|x|-2\right|=a+|x|-5|x+1|+3x+9$. (10 баллов)

Решение:

Преобразуем неравенство $x(x+2)\le a(2-a)\Leftrightarrow (x+1)^2+(a-1)^2\le 2.$

Преобразуем уравнение $\left|2a-5|x+1|+3x+7\right|+\left|a-|x|-2\right|=a+|x|-5|x+1|+3x+9$. Обозначим $u=2a-5|x+1|+3x+7$, $v=a-|x|-2$. Тогда исходное уравнение будет иметь вид $|u|+|v|=u-v.$ Решениями последнего уравнения являются все u и v такие, что $u\ge 0,\ v\le 0,$ или $2a-5|x+1|+3x+7\ge 0$ и $a-|x|-2\le 0.$ Отсюда имеем $2{,}5|x+1|-1{,}5x-3{,}5\le a\le |x|+2$



В системе Oxa построим кривые $(x+1)^2+(a-1)^2=2,$ $2a=5|x+1|-3x-7$ и $a=|x|+2.$ Точки, удовлетворяющие неравенству $(x+1)^2+(a-1)^2\le 2$ образуют круг с центром в точке (-1; 1) радиуса $\sqrt{2}$. Точки, удовлетворяющие неравенству $2{,}5|x+1|-1{,}5x-3{,}5\le a\le |x|+2$, расположены в области ниже угла $a=|x|+2$ и выше угла $2a=5|x+1|-3x-7$, включая границу.

Найдем точки пересечения окружности и прямой $a=-4x-6$ (левый луч второго угла).

Подставим $a=-4x-6$ в уравнение окружности $(x+1)^2+(a-1)^2=2.$

Получим $(x+1)^2+(4x+7)^2=2,$

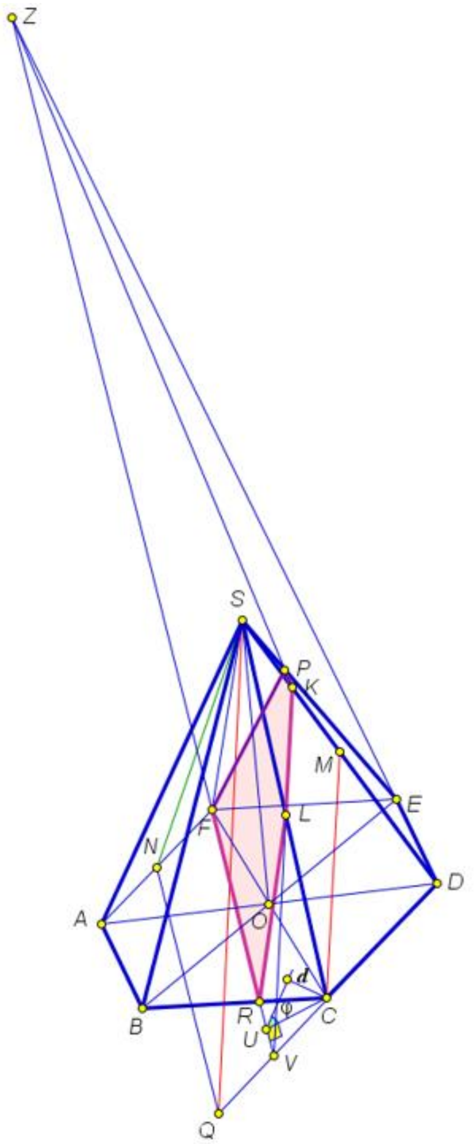
$17x^2+58x+48=0,$

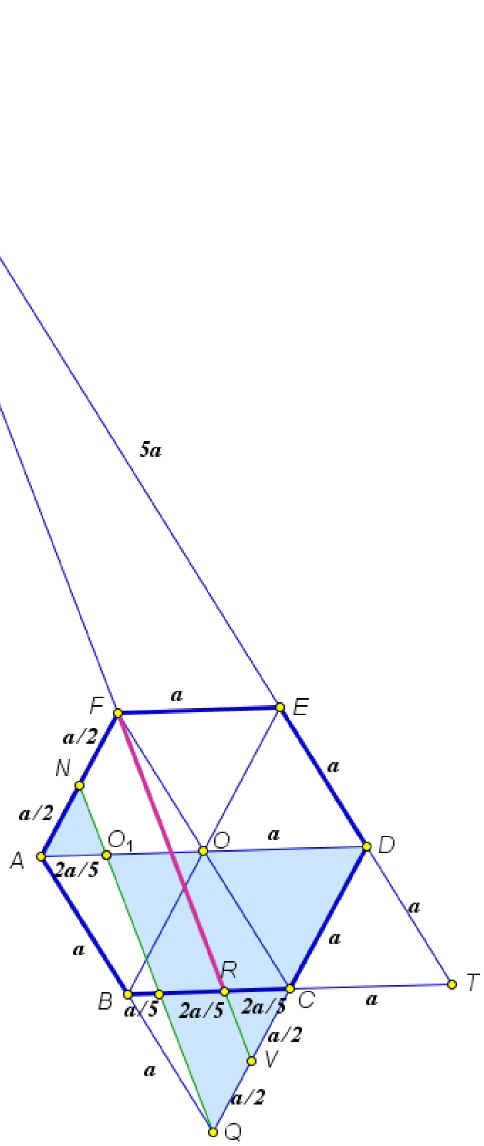
$x_1=-2,\ a_1=2,\ x_2=-\dfrac{24}{17},\ a_2=-\dfrac{6}{17}.$ Тогда значения параметра a, отвечающие на вопрос задачи образуют множество $\left[1-\sqrt{2};-\dfrac{6}{17}\right]\cup\left[2;1+\sqrt{2}\right].$ **Ответ:** $\left[1-\sqrt{2};-\dfrac{6}{17}\right]\cup\left[2;1+\sqrt{2}\right].$

6. Сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ образовано плоскостью, проходящей через вершину F основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF, сторона основания пирамиды равна 8, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно 2. Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания. (10 баллов)

Решение. В плоскости SCD через точку S проведем прямую SQ, параллельную CM, Q принадлежит прямой CD, CM – средняя линия треугольника $SQD, QC = a$, где a – сторона основания пирамиды.

Плоскость SNQ параллельна плоскости сечения. Через точку F проведем прямую FV, параллельную NQ, $V \in CQ, QV = VC = a/2$. R – точка пересечения прямых FV и BC. Плоскость сечения пересекает основание пирамиды по отрезку FR.

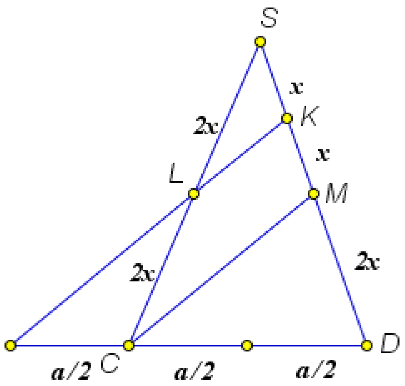




O_1 – точка пересечения NQ и AD, треугольники AO_1N и DO_1Q подобны. $AO_1 : O_1D = 1:4$, $AO_1 = 2a/5$, $RC = AO_1 = 2a/5$.

Точка Z – точка пересечения прямых RF и DE. Точка T – точка пересечения прямых BC и DE. Треугольники FZE и RZT подобны, и $FE: RT = ZE: ZT = 5: 7, ZE = 5a$.

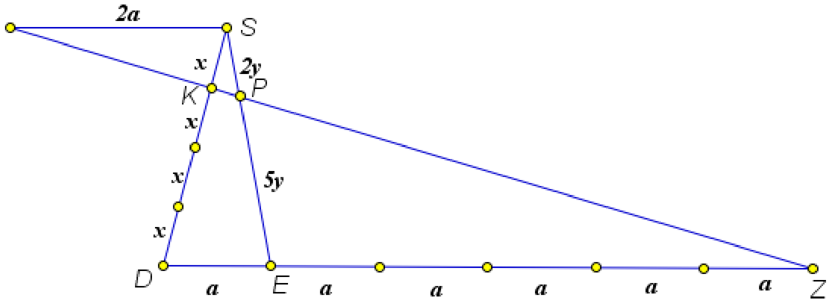
В плоскости SCD через точку V проведем прямую VK, параллельную CM, K принадлежит ребру SD, L – точка пересечения прямой VK с ребром SC.



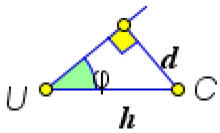
По теореме Фалеса имеем: $SK: KM: MD = 1: 1: 2, SL: LC = 1: 1$.

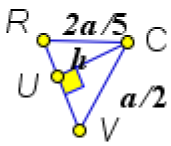
В плоскости SDE точка P – точка пересечения прямых ZK и SE. По теореме Фалеса имеем $SP: PE = 2: 5$.

Искомое сечение $KLRFP$.



Обозначим расстояние от точки S до плоскости сечения d, $d = 2$. Расстояние от точки C до сечения равно d. В треугольнике RCV проведем высоту CU, обозначим ее длину h. Тогда $\sin\varphi = \frac{d}{h}, \cos\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{d}{h}\right)^2}$. Найдем RV по теореме косинусов:





$$RV^2 = \frac{4a^2}{25} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{5} = \frac{21a^2}{100}, RV = \frac{\sqrt{21}a}{10}$$

Используя различные формулы для нахождения площади треугольника RCV, имеем

$\frac{\sqrt{21}ah}{10} = \frac{a^2}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, h = \frac{a}{\sqrt{7}}$. Тогда $\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{7d^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-7d^2}}{a} = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Инженерное дело (академический тур)
Предмет: Математика
Класс: 10

Задание 1 (максимальная оценка 6 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Определена ОДЗ, показано, что для неположительных x из ОДЗ неравенство выполняется.	2
Обосновано, что равенство левой и правой частей неравенства достигается в единственной точке, эта точка найдена.	3
При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка.	5
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	6

Задание 2 (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже.	0
Верно составлена система неравенств.	2
Верно определена сумма масс трех плодов и ограничения на массу каждого.	4
При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка, и/или нет полного обоснования полученного ответа.	6
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	8

Задание 3 (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Перечислены все группы благоприятных событий, верно определено число элементарных исходов части этих событий.	2
Верно посчитано число всех благоприятных элементарных исходов.	4
При решении задачи допущена одна вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	6
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	8

Задание 4 (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Правильно использованы свойства биссектрис треугольников для определения соотношений отрезков, необходимых для нахождения площадей нужных треугольников.	2
Верно найдены соотношения для площадей треугольников, необходимые для получения правильного ответа.	4
При решении задачи допущена вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	6
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	8

Задание 5 (максимальная оценка 10 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Уравнение сведено к системе неравенств.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a.	5
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек, и/или нет полного обоснования, что полученное множество значений является окончательным.	8
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	10

Задание 6 (максимальная оценка 10 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно построено сечение с полным описанием построения.	3
Найдены необходимые для решения задачи отношения, в которых плоскость сечения делит ребра пирамиды. Установлена связь расстояния от вершины пирамиды до плоскости сечения с углом между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.	5
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.	8
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	10