Решение варианта №1 (Инженерное дело - 11 класс)

1. Решите неравенство $\sqrt[8]{5-\lg^2 x} > \lg^3 x + \lg x - 9.$ (6 баллов)

Решение. Замена $t = \lg x$. Имеем $\sqrt[8]{5-t^2} > t^3 + t - 9$

ОДЗ: $5 - t^2 \geq 0, t \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}].$

Если $t \in [-\sqrt{5}; 0],$ то неравенство выполняется. Если $t \in [0; \sqrt{5}],$ то функция $f(t) = \sqrt[8]{5-t^2}$ непрерывна и убывает, а функция $g(t) = t^3 + t - 9$ непрерывна и возрастает. Тогда уравнение $f(t) = g(t)$ имеет единственное решение, таким решением является $t = 2$. Для каждого $t \in [0; 2)$ имеем $f(t) = \sqrt[8]{5-t^2} > f(2) = 1,$ $g(t) = t^3 + t - 9 < g(2) = 1,$ и неравенство $\sqrt[8]{5-t^2} > t^3 + t - 9$ выполняется. Для каждого $t \in (2; \sqrt{5}]$ имеем $f(t) = \sqrt[8]{5-t^2} < f(2) = 1,$ $g(t) = t^3 + t - 9 > g(2) = 1,$ и неравенство $\sqrt[8]{5-t^2} > t^3 + t - 9$ не выполняется. Итак, неравенство выполняется, если $t \in [-\sqrt{5}; 2).$ Возвращаясь к переменному *x*, получаем $-\sqrt{5} \leq \lg x < 2,$ $x \in [10^{-\sqrt{5}}; 100).$ **Ответ:** $[10^{-\sqrt{5}}; 100).$

2. Для определения веса арбуза, дыни и тыквы использовали неисправные электронные весы, которые показывали вес, отличающийся от истинного, но не более, чем на 0,5 кг в любую сторону (при этом при разных взвешиваниях отклонения показаний весов от истинного веса могли быть разными). Когда на весы положили арбуз и дыню вместе, то они показали 11,5 кг, совместный вес арбуза и тыквы оказался равным 13 кг, а дыни и тыквы – 12 кг. Когда взвесили арбуз, дыню и тыкву вместе, то весы показали 17 кг. Определите истинные веса арбуза, дыни и тыквы. (8 баллов)

Решение. Пусть *x*, *y*, *z* – массы арбуза, дыни и тыквы соответственно. Тогда

$$\begin{cases} 11 \leq x + y \leq 12, & (1) \\ 12,5 \leq x + z \leq 13,5, & (2) \\ 11,5 \leq y + z \leq 12,5 & (3) \\ 16,5 \leq x + y + z \leq 17,5, & (4) \end{cases} \Rightarrow$$

$(1)+(2)+(3) \Rightarrow 35 \leq 2(x+y+z) \leq 37, \Rightarrow 17,5 \leq x+y+z \Rightarrow (4)\ x+y+z = 17,5.$

$(1) \Rightarrow 11 \leq 17,5 - z \leq 12 \Rightarrow 5,5 \leq z \leq 6,5;$

$(2) \Rightarrow 12,5 \leq 17,5 - y \leq 13,5 \Rightarrow 4 \leq y \leq 5;$

$(3) \Rightarrow 11,5 \leq 17,5 - x \leq 12,5 \Rightarrow 5 \leq x \leq 6.$

$(1)+(2) \Rightarrow 23,5 \leq 17,5 + x \leq 25,5 \Rightarrow 6 \leq x \leq 8 \Rightarrow x = 6;$

$(1)+(3) \Rightarrow 22,5 \leq 17,5 + y \leq 24,5 \Rightarrow 5 \leq y \leq 7 \Rightarrow y = 5;$

$(1)+(3) \Rightarrow 24 \leq 17,5 + z \leq 26 \Rightarrow 6,5 \leq z \leq 8,5 \Rightarrow z = 6,5.$

Ответ: арбуз – 6 кг, дыня – 5 кг, тыква – 6,5 кг.

3. Для занятия по рисованию в группе детского сада имеется 36 карандашей. Артем схватил восемь карандашей, София – семь, Саша – шесть, Вика – пять, Миша – четыре, Аня – три, Ваня – два, Маша – один, а Максиму и Алисе карандашей не досталось. Дети случайно рассаживаются за двумя столами с пятью стульчиками у каждого. Какова вероятность, что при этом общее количество карандашей на каждом столе окажется одинаковым? (8 баллов)

Решение. Перенумеруем детей по количеству имеющихся у них карандашей: $0_1, 0_2$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. За элементарный исход эксперимента можно взять совокупность номеров детей, оказавшихся за первым столом (заполнение второго стола определяется автоматически):

$$\omega = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}, \quad i_j \in \{0_1, 0_2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad j = \overline{1,5}.$$

С точки зрения комбинаторики это сочетание без повторений 5 элементов из 10 элементов. Поэтому общее количество исходов равно $|\Omega| = |\{\omega\}| = C_{10}^5 = \frac{10!}{5!\,5!} = 252$. Для определенности будем указывать номера детей в сочетании в порядке возрастания:

$$\omega = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}, \quad i_1 \leqslant i_2 < i_3 < i_4 < i_5.$$

Пусть $A = \big\{\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\} : i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = \frac{36}{2} = 18\big\}$ — интересующая нас совокупность рассадок детей за первым столом. Очевидно, что при этом $\underline{i_1 \in \{0_1, 0_2, 1\}}$, поскольку при $i_1 \geqslant 2$ мы получили бы $i_1+i_2+i_3+i_4+i_5 \geqslant 2+3+4+5+6 = 20$. Аналогично очевидно, что $\underline{i_5 \in \{6, 7, 8\}}$, поскольку при $i_5 \leqslant 5$ мы получили бы $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 \leqslant 1+2+3+4+5 = 15$. Поэтому совокупность (событие) A является объединением следующих 9, вообще говоря несовместных (!),[1] событий:

$$A = (A_{i_1=0_1,i_5=6} \sqcup A_{i_1=0_1,i_5=7} \sqcup A_{i_1=0_1,i_5=8}) \cup (A_{i_1=0_2,i_5=6} \sqcup A_{i_1=0_2,i_5=7} \sqcup A_{i_1=0_2,i_5=8}) \sqcup$$
$$\sqcup (A_{i_1=1,i_5=6} \sqcup A_{i_1=1,i_5=7} \sqcup A_{i_1=1,i_5=8}).$$

Рассмотрим по отдельности эти события:

1) $A_{i_1=0_1,i_5=6} = \big\{\{0_1, i_2, i_3, i_4, 6\} : 0_1 \leqslant i_2 < i_3 < i_4 < 6;\ i_2 + i_3 + i_4 = 12\big\} \overset{(!)}{=\!=}$

$= \{0_1, \boxed{3, 4, 5}, 6\}, \quad |A_{i_1=0_1,i_5=6}| = \boxed{1}.$

2) $A_{i_1=0_1,i_5=7} = \big\{\{0_1, i_2, i_3, i_4, 7\} : 0_1 \leqslant i_2 < i_3 < i_4 < 7;\ i_2 + i_3 + i_4 = 11\big\} \overset{(!)}{=\!=}$

$= \big\{\{0_1, \boxed{0_2, 5, 6}, 7\},\ \{0_1, \boxed{1, 4, 6}, 7\},\ \{0_1, \boxed{2, 3, 6}, 7\},\ \{0_1, \boxed{2, 4, 5}, 7\}\big\};$

$|A_{i_1=0_1,i_5=7}| = \boxed{4}.$

3) $A_{i_1=0_1,i_5=8} = \big\{\{0_1, i_2, i_3, i_4, 8\} : 0_1 \leqslant i_2 < i_3 < i_4 < 8;\ i_2 + i_3 + i_4 = 10\big\} \overset{(!)}{=\!=}$

$= \big\{\{0_1, \boxed{0_2, 3, 7}, 8\},\ \{0_1, \boxed{1, 2, 7}, 8\},\ \{0_1, \boxed{0_2, 4, 6}, 8\},\ \{0_1, \boxed{1, 3, 6}, 8\}\big\};$

$= \big\{\{0_1, \boxed{1, 4, 5}, 8\},\ \{0_1, \boxed{2, 3, 5}, 8\};\quad |A_{i_1=0_1,i_5=8}| = \boxed{6}.$

4), 5), 6) Аналогично:

[1] За счет того, что $\{0_1, 0_2\}$ и $\{0_2, 0_1\}$ — это одна и та же комбинация детей.

$$|A_{i_1=0_2,i_5=6}| = \boxed{1}, \quad |A_{i_1=0_2,i_5=7}| = \boxed{4}, \quad |A_{i_1=0_2,i_5=8}| = \boxed{6}.$$

7) $A_{i_1=1,i_5=6} = \Big\{\{1, i_2, i_3, i_4, 6\} : 1 < i_2 < i_3 < i_4 < 6;\ i_2 + i_3 + i_4 = 11\Big\} \stackrel{(!)}{=\!=}$
$= \{1, \boxed{2, 4, 5}, 6\}, \quad |A_{i_1=1,i_5=6}| = \boxed{1}.$

8) $A_{i_1=1,i_5=7} = \Big\{\{1, i_2, i_3, i_4, 7\} : 1 < i_2 < i_3 < i_4 < 7;\ i_2 + i_3 + i_4 = 10\Big\} \stackrel{(!)}{=\!=}$
$= \{1, \boxed{2, 3, 5}, 7\}, \quad |A_{i_1=1,i_5=7}| = \boxed{1}.$

9) $A_{i_1=1,i_5=8} = \Big\{\{1, i_2, i_3, i_4, 8\} : 1 < i_2 < i_3 < i_4 < 8;\ i_2 + i_3 + i_4 = 9\Big\} \stackrel{(!)}{=\!=}$
$= \{1, \boxed{2, 3, 4}, 8\}, \quad |A_{i_1=1,i_5=8}| = \boxed{1}.$

И учитывая, что исход (рассадки детей) $\{\boxed{0_1, 0_2}, 5, 6, 7\}$ из события $A_{i_1=0_1,i_5=7}$ очевидно повторяется в событии $A_{i_1=0_2,i_5=7}$, а исходы $\{\boxed{0_1, 0_2}, 3, 7, 8\}$, $\{\boxed{0_1, 0_2}, 4, 6, 8\}$ из события $A_{i_1=0_1,i_5=8}$ очевидно повторяется в событии $A_{i_1=0_2,i_5=8}$, получаем:

$$|A| = (1 + 4 + 6) + (1 + 4 + 6) + (1 + 1 + 1) - 3 = 22.$$

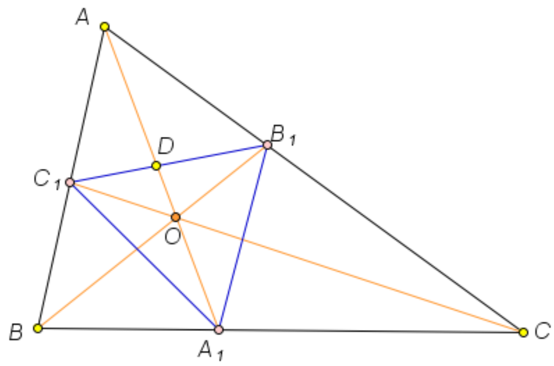
И тогда:

$$\mathbb{P}(A) \stackrel{(!)}{=\!=} \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{22}{252} = \frac{11}{126}.$$

Ответ: Искомая вероятность равна $\frac{11}{126}$.

4. Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников ABC и B_1OC_1, если $AB: BC: AC = 2: 3: 4$. (8 баллов)

Решение.



$$AB: BC: AC = 2: 3: 4,$$

$a = BC = 3x, b = AC = 4x,\ c = AB = 2x.$

По свойствам биссектрис имеем

$$AC_1 = \frac{bc}{a+b} = \frac{8x}{7}, \qquad BC_1 = \frac{ac}{a+b} = \frac{6x}{7},$$

$$AB_1 = \frac{bc}{a+c} = \frac{8x}{5}, \qquad CB_1 = \frac{ab}{a+c} = \frac{12x}{5},$$

$$S_{C_1AB_1} = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5} S_{ABC} = \frac{8}{35} S_{ABC}.$$

По теореме Менелая для треугольника ABO имеем $\frac{OD}{DA} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BB_1}{OB_1} = 1$. Поскольку $\frac{BO}{OB_1} = \frac{5}{4}$, то

$\frac{OD}{DA} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$. Тогда $\frac{S_{C_1OB_1}}{S_{C_1AB_1}} = \frac{OD}{DA} = \frac{1}{3}$, $S_{C_1OB_1} = \frac{1}{3} S_{C_1AB_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{35} S_{ABC} = \frac{8}{105} S_{ABC}.$

Ответ: $\mathbf{\frac{105}{8}}$.

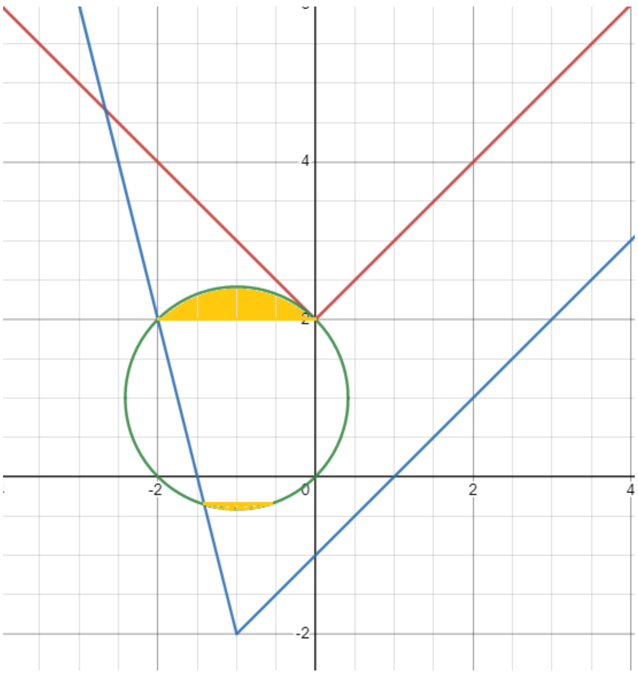
5. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x(x+2)\le a(2-a)$ имеет хотя бы одно решение, и каждое решение этого неравенства является также решением уравнения $|2a-5|x+1|+3x+7|+|a-|x|-2|=a+|x|-5|x+1|+3x+9$. (10 баллов)

Решение:

Преобразуем неравенство $x(x+2)\le a(2-a)\Leftrightarrow(x+1)^2+(a-1)^2\le 2.$

Преобразуем уравнение $|2a-5|x+1|+3x+7|+|a-|x|-2|=a+|x|-5|x+1|+3x+9$. Обозначим $u=2a-5|x+1|+3x+7$, $v=a-|x|-2$. Тогда исходное уравнение будет иметь вид $|u|+|v|=u-v$. Решениями последнего уравнения являются все u и v такие, что $u\ge 0,\ v\le 0,$ или $2a-5|x+1|+3x+7\ge 0$ и $a-|x|-2\le 0$. Отсюда имеем $2{,}5|x+1|-1{,}5x-3{,}5\le a\le|x|+2$

В системе *Oxa* построим кривые $(x+1)^2+(a-1)^2=2,$ $2a=5|x+1|-3x-7$ и $a=|x|+2.$ Точки, удовлетворяющие неравенству $(x+1)^2+(a-1)^2\le 2$ образуют круг с центром в точке (-1; 1) радиуса $\sqrt{2}$. Точки, удовлетворяющие неравенству $2{,}5|x+1|-1{,}5x-3{,}5\le a\le|x|+2$, расположены в области ниже угла $a=|x|+2$ и выше угла $2a=5|x+1|-3x-7$, включая границу.



Найдем точки пересечения окружности и прямой $a=-4x-6$ (левый луч второго угла).

Подставим $a=-4x-6$ в уравнение окружности $(x+1)^2+(a-1)^2=2.$

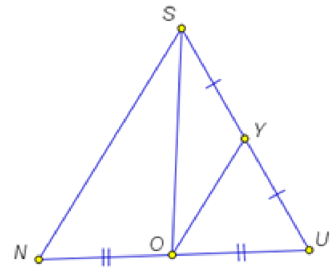
Получим $(x+1)^2+(4x+7)^2=2,$

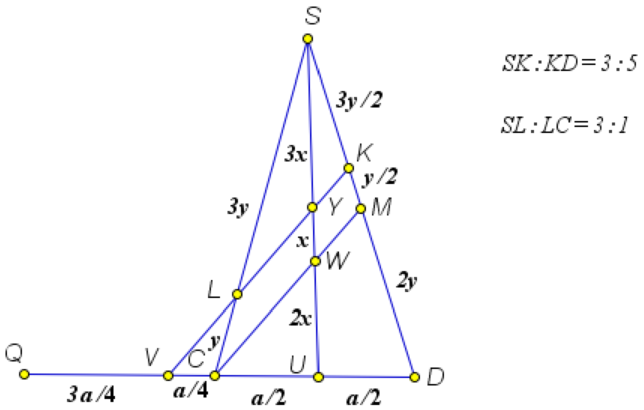
$17x^2+58x+48=0,$

$x_1=-2,\ a_1=2,\ x_2=-\frac{24}{17},\ a_2=-\frac{6}{17}.$ Тогда значения параметра a, отвечающие на вопрос задачи образуют множество $\left[1-\sqrt{2};-\frac{6}{17}\right]\cup\left[2;1+\sqrt{2}\right]$. **Ответ:** $\left[1-\sqrt{2};-\frac{6}{17}\right]\cup\left[2;1+\sqrt{2}\right]$.

6. Найдите площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью, проходящей через центр основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF, если сторона основания пирамиды равна 28, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно $1{,}5\sqrt{91}$. (20 баллов)

Решение. Построим сечение пирамиды. В плоскости SNU (SU – апофема грани SCD) через точку O проведем прямую OY, параллельную SN, $Y \in SU$, OY – средняя линия треугольника SNU.



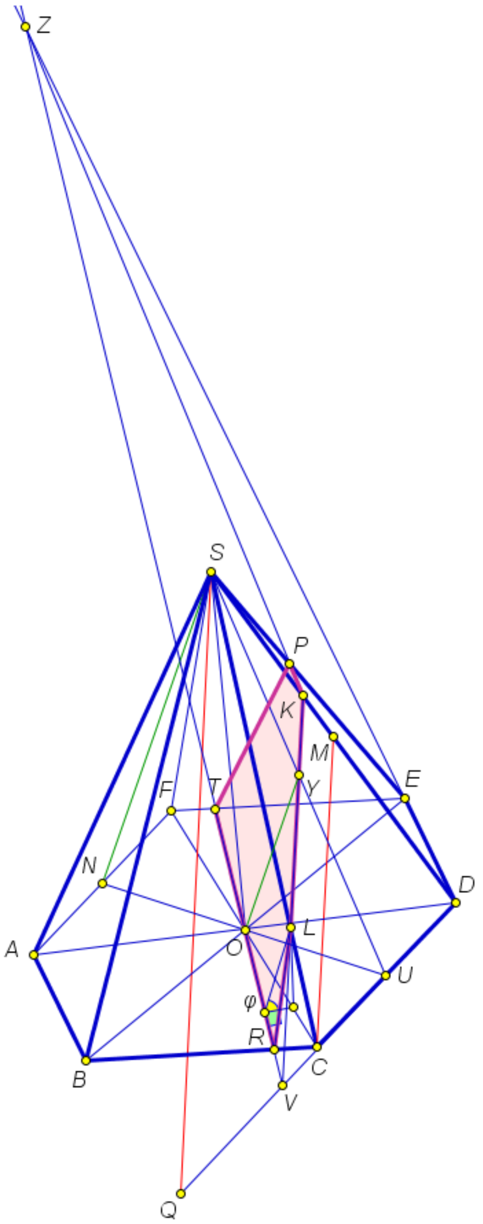


В плоскости SCD через точку Y проведем прямую KL, параллельную CM, $K \in SD$, $L \in SC$.

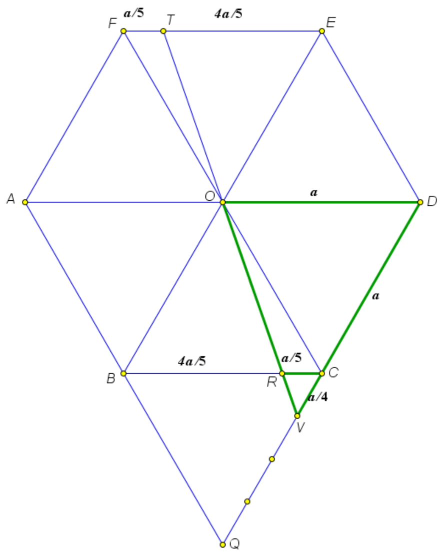
Медианы SU и CM треугольника SCD в точке пересечения W делятся в отношении 2:1, т.е. $SW : WU = 2:1$. Имеем $SY : YW : WU = 3:1:2$. Согласно теореме Фалеса, приходим к соотношениям $SL : LC = 3:1$, $SK : KD = 3:5$.

Точка V – точка пересечения прямой KL и CD, $KM : MD = VC : CD = 1:4$.

В плоскости основания проведем прямую VO, точки R и T – точки пересечения со сторонами BC и FE соответственно. Треугольники RCV и ODV подобны, и $SL : LC = 3:1$, $SK : KD = 3:5$. Обозначим сторону основания a, тогда $RC = FT = a/5$, $BR = TE = 4a/5$.

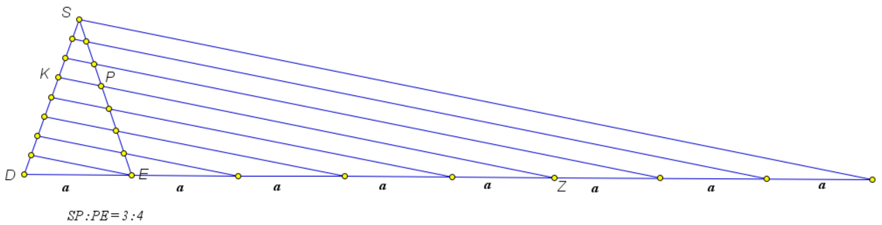


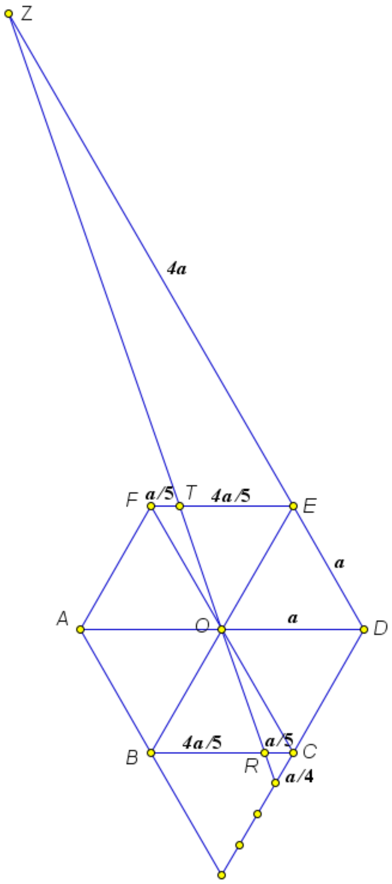
Точка Z – точка пересечения прямых RT и DE. Треугольники TZE и OZD подобны, и $TE:OD = ZE:ZD = 4:5,\ ED = a,\ ZE = 4a.$



В плоскости SDE точка P – точка пересечения прямых ZK и SE. По теореме Фалеса имеем $SP:PE = 3:4.$

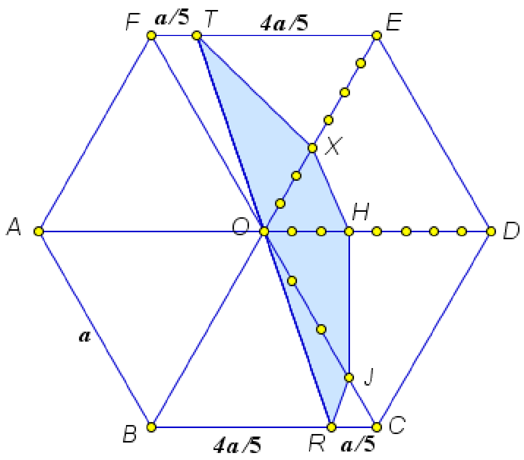
Искомое сечение $KLRTP$.





Площадь сечения будем вычислять по формуле

$S_{сеч} = \dfrac{S_{пр}}{\cos\varphi}$, где $S_{пр}$ - площадь проекции сечения на плоскость основания, φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания.



Проекцией является пятиугольник $TXHJR$. Площадь проекции сечения вычисляется по формуле $S_{пр} = S_{ORJ} + S_{OJH} + S_{OHX} + S_{OXT} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{3}{20} + \dfrac{9}{32} + \dfrac{9}{56} + \dfrac{12}{35}\right) = \dfrac{a^2 1047\sqrt{3}}{4\cdot 7\cdot 32\cdot 5} = \dfrac{7329\sqrt{3}}{40}.$

Обозначим расстояние от точки S до плоскости сечения d, $d = 1{,}5\sqrt{91}$. Расстояние от точки C до сечения равно $d/3$. В треугольнике RCV проведем высоту CG, обозначим ее длину h.

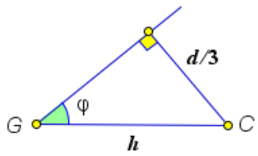
Тогда $\sin\varphi = \dfrac{d}{3h}$, $\cos\varphi = \sqrt{1-\dfrac{d^2}{9h^2}}$. Найдем RV по теореме косинусов:

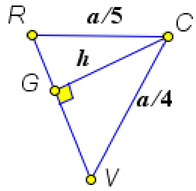
$RV^2 = \dfrac{a^2}{25}+\dfrac{a^2}{16}-\dfrac{a^2}{20} = \dfrac{21a^2}{400}$, $RV = \dfrac{a\sqrt{21}}{20} = \dfrac{7\sqrt{21}}{5}$. Используя различные формулы для нахождения площади треугольника RCV, имеем $\dfrac{a\sqrt{21}}{20}h = \dfrac{a^2}{20}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $h = \dfrac{a}{2\sqrt{7}} = \dfrac{14}{\sqrt{7}}$. Тогда

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{d^2}{9h^2}} = \sqrt{1-\frac{28d^2}{9a^2}} = \frac{\sqrt{9a^2-28d^2}}{3a} = \sqrt{1-\frac{28\cdot 9\cdot 13}{9\cdot 64\cdot 7}} = \sqrt{1-\frac{13}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Окончательно имеем

$$S_{сеч} = \frac{a^3 3141\sqrt{3}}{4480\sqrt{9a^2-28d^2}} = \frac{7329\sqrt{3}\cdot 4}{40\sqrt{3}} = \frac{7329}{10}.$$





Ответ: $\dfrac{7329}{10}$.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Инженерное дело (академический тур)
Предмет: Математика
Класс: 11

Задание 1 (максимальная оценка 6 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Сделана замена переменного. Определена ОДЗ, показано, что для неположительных x из ОДЗ неравенство выполняется.	2
Обосновано, что равенство левой и правой частей неравенства достигается в единственной точке, эта точка найдена.	3
При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка.	5
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	6

Задание 2 (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже.	0
Верно составлена система неравенств.	2
Верно определена сумма масс трех плодов и ограничения на массу каждого.	4
При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка, и/или нет полного обоснования полученного ответа.	6
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	8

Задание 3 (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Перечислены все группы благоприятных событий, верно определено число элементарных исходов части этих событий.	2
Верно посчитано число всех благоприятных элементарных исходов.	4
При решении задачи допущена одна вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	6
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	8

Задание 4 (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Правильно использованы свойства биссектрис треугольников для определения соотношений отрезков, необходимых для нахождения площадей нужных треугольников.	2
Верно найдены соотношения для площадей треугольников, необходимые для получения правильного ответа.	4
При решении задачи допущена вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	6
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	8

Задание 5 (максимальная оценка 10 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Уравнение сведено к системе неравенств.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a.	5
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек, и/или нет полного обоснования, что полученное множество значений является окончательным.	8
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	10

Задание 6 (максимальная оценка 10 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно построено сечение с описанием построения и частично найдены отношения, в которых плоскость сечения делит ребра пирамиды.	3
Верно найдена площадь проекции сечения на плоскость основания или косинус угла между плоскостью сечения и основанием, при этом верно построено сечение с описанием построения и найдены все отношения, в которых плоскость сечения делит ребра пирамиды.	5
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.	8
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	10