10-й класс

№1: Упрощение-уравнение-неравенство.

Найти наименьшее значение выражения

$$2x^2-14x+42+2\sqrt{x^2-10x+34}\sqrt{x^2-4x+8}.$$

В ответ запишите квадрат этого значения.

Решение:

Заметим, что

$$2x^2-14x+42+2\sqrt{x^2-10x+34}\sqrt{x^2-4x+8} = \left(\sqrt{x^2-10x+34}+\sqrt{x^2-4x+8}\right)^2,$$

$$\sqrt{x^2-10x+34}+\sqrt{x^2-4x+8}=\sqrt{(x-5)^2+9}+\sqrt{(x-2)^2+4}.$$

Первое слагаемое последнего выражения есть расстояние от точки $A(x;0)$ до точки $B(5;-3)$, второе слагаемое – расстояние от точки $A(x;0)$ до точки $C(2;2)$, причем точки B и C лежат по разные стороны от оси OX. Таким образом, последнее выражение есть сумма расстояний $AB+AC$ и $AB+AC\geq BC$. Эта сумма расстояний принимает наименьшее значение, равное длине BC, только тогда, когда точка $A(x;0)$ будет лежать на отрезке BC, $BC=\sqrt{34}$. $BC^2=34$ Получаем ответ: $34^2=1156$.

Ответ: 1156

№2: Движение-работа

Двое рабочих должны были изготовить по 36 деталей. Второй рабочий начал работать на 24 минуты позднее первого. По две трети задания они выполнили к одному времени, и чтобы закончить работу вместе с первым рабочим, второй сделал за него две детали. Сколько деталей в час изготавливал второй рабочий?

Решение:

Обозначим p_1, p_2- производительности рабочих, $\frac{2}{3}\cdot 36 = 24$, 36-24=12. По условию задачи составим систему уравнений $\begin{cases} \frac{24}{p_1} = \frac{24}{p_2} + \frac{24}{60} \\ \frac{10}{p_1} = \frac{14}{p_2} \end{cases}$; $\begin{cases} p_1 = \frac{5}{7} p_2 \\ \frac{7}{5p_2} - \frac{5}{5p_2} = \frac{1}{60} \end{cases}$; $\frac{2}{5p_2} = \frac{1}{60}; p_2 = 24 дет / час.$ Примечание: p_1 в данной задаче не является целым числом.

Ответ: 24

№3: Треугольники.

В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках P, Q и R. Найдите площадь треугольника PQR, если длины катетов треугольника ABC равны 3 и 4.

Ответ: 1,2

№4: Прогрессия.

Числа x, y, z – последовательные члены арифметической прогрессии.
Числа y, z, t – последовательные члены геометрической
прогрессии. x+t=21. z+y=18. Найдите числа x, y, z, t. В ответ выпишите значение x. Если таких значений несколько, то выпишите большее из них.

Ответ: 18

№5: Проценты.

Из бутыли, до краёв наполненной 12%-ным раствором соли (по объёму), отлили 1 л раствора, долили до краёв бутыль водой и перемешали. Затем отлили ещё 1 л получившегося раствора, снова полностью долили водой и перемешали. В бутыли оказался 3%-ный раствор соли. Какова вместимость бутыли (в литрах)?

Ответ: 2

№6: Множество

A – множество чисел, делящихся на 3; B – множество чисел, дающих при делении на 4 остаток 1. C – множество простых чисел. На отрезке [100;200] найдите количество чисел, принадлежащих множеству

Решение:

A: 102, 105, 108, …, 198. С помощью формулы n – го члена арифметической прогрессии найдём количество элементов данного множества на [100;200]. Для этого решим неравенство $102+3(n-1)\le 200$; $n\le 33\frac{2}{3}$, то есть в множестве A содержится 33 элемента.

B: 101, 105, 109, 113, 117, …, 197. Аналогично найдём количество элементов множества B на [100;200]. Решим неравенство $101+4(n-1)\le 200$; $n\le 25\frac{3}{4}$. В множестве B содержится 25 чисел. Заметим, что в множестве B каждое четвёртое число, начиная со 105, является одновременно и элементом множества A, так как делится на 3. $A\cap B$: 105, 117, … - арифметическая прогрессия с разностью 12. Количество этих чисел тоже можно найти с помощью решения неравенства $105+12(n-1)\le 200$; $n\le \frac{107}{12}$. Количество элементов в пересечении множеств A и B равно 8. Далее воспользуемся формулой $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=33+25-8=50$.

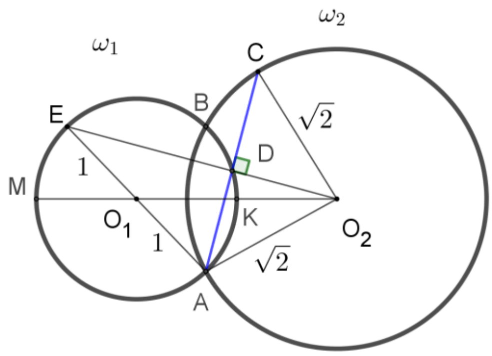
С помощью таблицы простых чисел выпишем все простые числа второй сотни: 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Числа множества A не могут быть простыми, так как они все делятся на 3, простые числа имеет смысл исключать только из множества B. Проще решить обратную задачу – найти, какие из простых чисел являются элементами множества B, то есть при делении на 4 дают остаток 1. Это числа: 101, 109, 113, 137, 149, 157, 173, 181, 193, 197, всего 10 чисел. Таким образом, $n((A\cup B)/C)=50-10=40$.

Ответ: 40

№7: Окружности.

Даны две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2, радиусы которых 1 и $\sqrt{2}$, соответсвенно. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, причем расстояние между центрами O_1 и O_2 равно 2. Найти длину хорды AC окружности ω_2, середина которой лежит на окружности ω_1. В ответ запишите квадрат длины хорды AC.

Решение:



Пусть D – середина хорды AC. Так как $O_2A = O_2C$, то $O_2D \perp AC$. Продолжим луч O_2D до еще одного пересечения с ω_1 в точке E, получим AE – диаметр ω_1, так как $\angle ADE = 90°$.

Пусть $AD = DC = x$, далее, треугольник DCO_2 прямоугольный, следовательно, $O_2D = \sqrt{O_2C^2 - CD^2} = \sqrt{2 - x^2}$. Треугольник ADE также прямоугольный, поэтому, $ED = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{4 - x^2}$.

Пусть M, K – точки пересечения O_1O_2 и ω_1. Так как $O_2D \cdot O_2E = O_2K \cdot O_2M$, то получим уравнение

$$\sqrt{2 - x^2} \cdot \left(\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{4 - x^2}\right) = 1 \cdot 3,$$

$$2 - x^2 + \sqrt{(2 - x^2) \cdot (4 - x^2)} = 3,$$

$$\sqrt{(2 - x^2) \cdot (4 - x^2)} = x^2 + 1,$$

$$x^4 - 6x^2 + 8 = x^4 + 2x^2 + 1,$$

$$8x^2 = 7,$$

$$x^2 = \frac{7}{8},$$

$$AC^2 = (2x)^2 = 4 \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Ответ: 3,5

№8: Параметр.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди корней уравнения $2x^2-16x+35=a|x-3|$ будет ровно три положительных. В ответе укажите произведение наименьшего целого значения параметра и количества изолированных точек в полученном множестве значений параметра.

Решение:

Рассмотрим функции $f(x)=2x^2-16x+35=2(x-4)^2+3$ и $g(x)=a|x-3|$. Построим графики этих функций в одной системе координат (см. рис.1). «Вершина» графика функции $y=g(x)$ находится в точке (3;0), а направление и ширина раствора ветвей меняются в зависимости от параметра a. При $a<0$ ветви модуля направлены вниз и график $g(x)$ не пересекает параболу. При $a=0$ график $g(x)$ совпадает с осью Ох. Пересечение возможно только при $a>0$. При небольших положительных a точек пересечения тоже нет. Одно решение появляется, когда правая ветвь $g(x)$ коснётся правой ветви $f(x)$. При увеличении a будет две точки пересечения – два решения. Три решения будет в случае касания левой ветви $g(x)$ с левой ветвью параболы. Правая ветвь $g(x)$ при этом пересекает параболу в двух точках. Дальше будет интервал значений параметра, когда уравнение имеет 4 положительных корня (4 точки пересечения) до тех пор, пока меньший из корней не станет равным нулю, а затем отрицательным. Это произойдёт при том значении параметра, при котором график $g(x)$ пройдёт через точку с координатами (0;35). Найдём это значение из уравнения $35=3a; a=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$.

$g(x)=a|x-3|=\left[\begin{array}{l} ax-3a, x\geq 3 \\ 3a-ax, x<3 \end{array}\right.$. Найдём, при каком значении a происходит касание левой ветви $g(x)$ с параболой. При этом дискриминант уравнения $2x^2-16x+35=3a-ax$ должен быть равен нулю. $2x^2+x(a-16)+35-3a=0$. $D=(a-16)^2-8(35-3a)=a^2-8a-24=0$; $(a-4)^2=40$; $a-4=\pm\sqrt{40}=\pm2\sqrt{10}$; $a=4\pm2\sqrt{10}$. Так как $a>0$, то $4-2\sqrt{10}$ - посторонний корень; $a=4+2\sqrt{10}$.

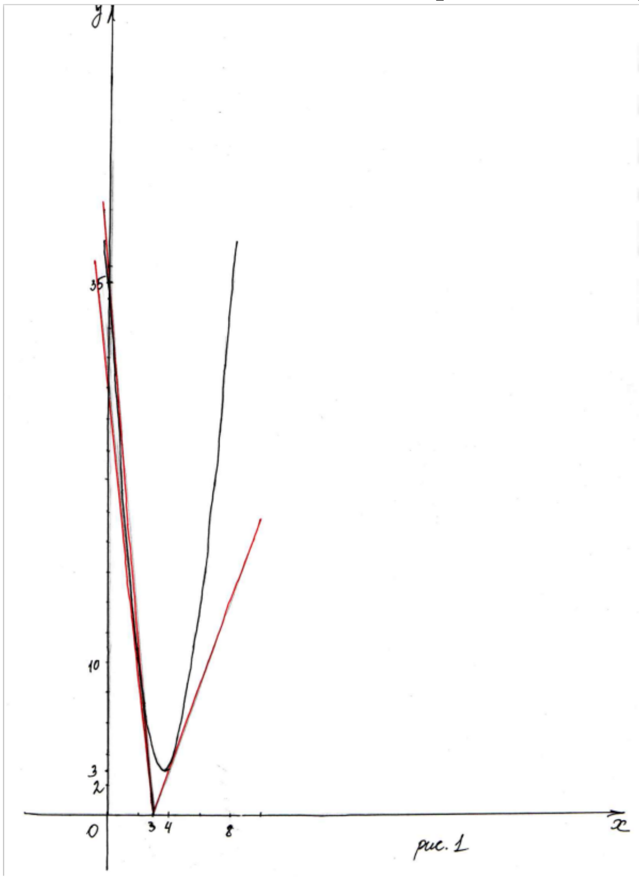


рис. 1

Сравним числа $4+2\sqrt{10}$ и $\frac{35}{3}$; $\Leftrightarrow 2\sqrt{10} и \frac{23}{3} \Leftrightarrow 40 и \frac{529}{9}$. $40 < 58,...$ $\Rightarrow 4+2\sqrt{10} < \frac{35}{3}$. Это значит, что абсцисса точки касания положительна. При $a \in (4+2\sqrt{10}; \frac{35}{3})$ уравнение имеет 4 положительных корня, при $a \in [\frac{35}{3}; +\infty)$- три положительных корня. Таким образом, уравнение имеет три различных положительных корня при $a \in \{4+2\sqrt{10}\} \cup [\frac{35}{3}; +\infty)$. Наименьшее целое число из полученных значений параметра равно 12, отдельная точка одна, $12 \cdot 1 = 12$

Ответ: 12

№9: Делимость.

Известно, что арифметическая прогрессия состоит из целых чисел, разность прогрессии равна 7 и сумма первых нескольких членов прогрессии равна 2744. Найдите все возможные значения первого члена прогрессии. В ответ запишите их сумму.

Решение.

Пусть a – первый член арифметической прогрессии, тогда сумма n первых членов арифметической прогрессии равна

$$\frac{2a+d(n-1)}{2}n = 2744,$$

$$\big(2a+7(n-1)\big)n = 2\cdot 2744 = 2^4\cdot 7^3.$$

Если n – четно, то $2a+7(n-1)$ – нечетно, поэтому $n=16k$, где k – натуральный делитель числа 7^3. Возможные значения k: $1, 7, 7^2, 7^3$. Найдем возможные значения a.

Если $k=1$, то $n=16$ и $a=119$.

Если $k=7$, то $n=16\cdot 7$ и $a=-364$.

Если $k=7^2$, то $n=16\cdot 7^2=784$ и $a=-2737$.

Если $k=7^3$, то $n=16\cdot 7^3=5488$ и $a=-19204$.

Если n – нечетно, то $2a+7(n-1)$ – четно, поэтому $n=p$, где p – натуральный делитель числа 7^3. Возможные значения p: $1, 7, 7^2, 7^3$. Найдем возможные значения a.

Если $p=n=1$, то $a=2744$.

Если $p=n=7$, то $a=371$.

Если $p=n=7^2$, то $a=-112$.

Если $p=n=7^3$, то $a=-1189$.

Сумма всех возможных значений a равна:

$$119-364-2737-19204+2744+371-112-1189=-20372.$$

Ответ. $\mathbf{-20372}$.