

Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

Вариант № 1

1. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 12 км, одновременно вышел пешеход и выехал автобус. Доехав до пункта B менее чем за один час, автобус, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту A со скоростью, в два раза большей первоначальной. Через 12 мин после своего отправления из пункта B автобус встретился с пешеходом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) пешехода, и для этого значения скорости пешехода определите первоначальную скорость автобуса (в км/ч). В ответ запишите сумму найденных значений скоростей пешехода и автобуса. (5 баллов)

2. Сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt[3]{|x|} + 10[x] = 10x? \quad ([x] - \text{целая часть числа } x, \text{ т.е. } [x] \in \mathbb{Z}, [x] \leq x < [x] + 1). \quad (5 \text{ баллов})$$

3. Решите неравенство $2\sqrt{x^2} \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{6x^2} + \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{3}|x| - \left(\frac{1}{x^2} - 3\right) \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$

В ответ запишите сумму всех целых значений x , удовлетворяющих этому неравенству.

(6 баллов)

4. Сколькими способами можно погрузить семь разных изделий (3 по 2 тонны, 4 по 1 тонне) в два фургона грузоподъемностями 6 т и 5 т, если расположение грузов внутри фургона не важно?

(12 баллов)

5. Числа от 100 до 999 выписаны без пробелов. С каким остатком полученное 2700-значное число делится на 7?

(12 баллов)

6. Какое наименьшее расстояние может быть между двумя точками, одна из которых лежит на графике функции $y = x^2$, другая — на кривой, заданной уравнением

$$4x^2 + 4y^2 - 48x - 24y + 163 = 0.$$

В ответ запишите квадрат найденного расстояния.

(12 баллов)

7. В треугольнике ABC , площадь которого равна $180\sqrt{3}$, проведены биссектриса AD и высота AH . Окружность радиуса $\frac{105\sqrt{3}}{4}$ с центром, лежащим на прямой BC , проходит через точки A и D . Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $BH^2 - HC^2 = 768$.

(16 баллов)

8. Найдите наименьшее целое значение параметра a , при котором уравнение $x^2 + 2x + a^2 + 2a - 5 = 2\left(f\left(\frac{1}{x}\right) - ax\right)$ имеет единственное решение. Функция $f(t)$ задается

соотношением $f(t) = \frac{\sqrt[3]{(27 \cdot t^2 + 4)(t + 2) + 32t}}{t - \sqrt{t^2}}$ при всех возможных значениях t . (16 баллов)

9. В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ через центр основания $ABCD$ проведено сечение плоскостью параллельно медиане AM боковой грани TAB и апофеме TK боковой грани TCD . Найдите объем пирамиды с вершиной в точке T , основанием которой является указанное выше сечение, если высота пирамиды $TABCD$ равна 12, а расстояние между прямой AM и плоскостью сечения равно $\sqrt{3}$.

(16 баллов)

Решение варианта № 1 (11 класс, отборочный этап)

1. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 12 км, одновременно вышел пешеход и выехал автобус. Доехав до пункта В менее чем за один час, автобус, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту А со скоростью, в два раза большей первоначальной. Через 12 мин после своего отправления из пункта В автобус встретился с пешеходом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) пешехода, и для этого значения скорости пешехода определите первоначальную скорость автобуса (в км/ч). В ответ запишите сумму найденных значений скоростей пешехода и автобуса. (5 баллов)

Решение. Пусть x – скорость пешехода (в км/ч), y – скорость автомобиля (в км/ч) на пути из А в В, $2y$ – скорость автомобиля на пути из В в А, t – время (ч), затраченное автомобилем на путь из А в В.

$$\begin{cases} yt = 12, \\ x(t + 0,2) = 12 - 0,4y, \Rightarrow x\left(\frac{12}{y} + \frac{1}{5}\right) = 12 - \frac{2y}{5} \Rightarrow 2y^2 + (x - 60)y + 60x = 0, \\ t < 1, \end{cases}$$

$$D = x^2 - 600x + 3600 \geq 0; \quad x^2 - 600x + 3600 = 0, \quad D/4 = 86400, \quad x_{1/2} = 300 \pm 120\sqrt{6}.$$

Поскольку $\frac{x}{5} < x\left(t + \frac{1}{5}\right) < 12 \Rightarrow x < 60$, то $x^2 - 600x + 3600 \geq 0$ при

$x \leq 300 - 120\sqrt{6} \approx 6,06$. Отсюда наибольшее возможное целое значение скорости пешехода $x = 6$. Найдем y при $x = 6$: $2y^2 - 54y + 3600 = 0$, $y_1 = 12$, $y_2 = 15$. Поскольку $t < 1$, то $y < 12 \Rightarrow y = 15$.

Ответ: 21

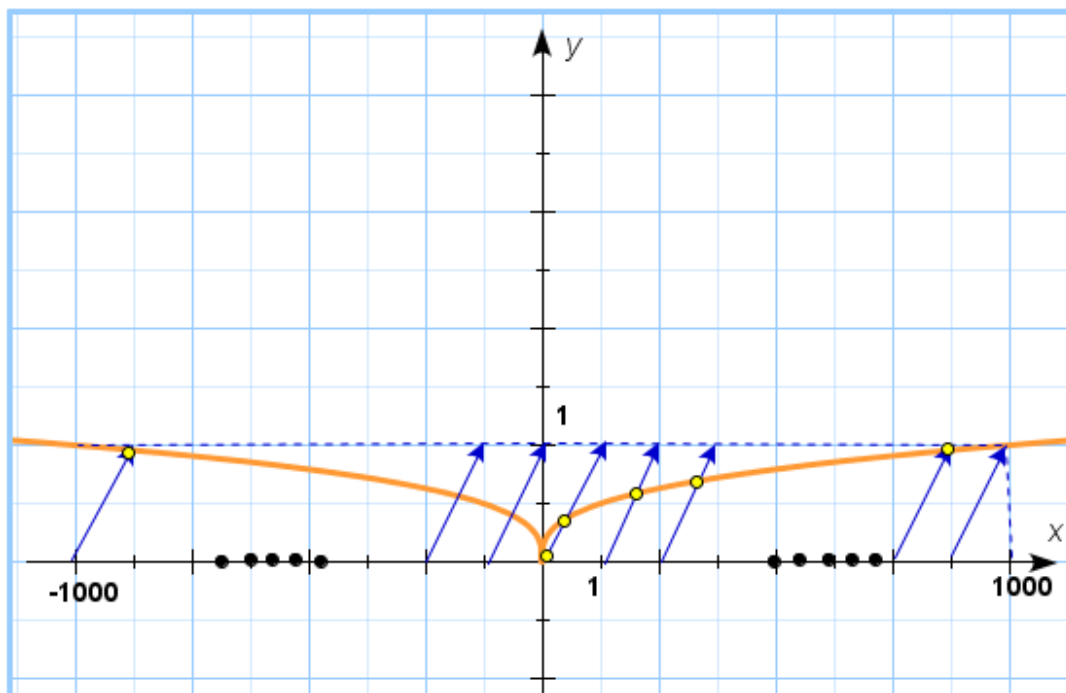
2. Сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt[3]{|x|} + 10[x] = 10x? \quad ([x] - \text{целая часть числа } x, \text{ т.е. } [x] \in \mathbb{Z}, [x] \leq x < [x] + 1).$$

(5 баллов)

Решение:

$$\frac{\sqrt[3]{|x|}}{10} = \{x\}, \{x\} = x - [x] \quad \text{Поскольку } \{x\} \in [0; 1), \text{ то } x \in (-1000; 1000).$$



На промежутке $[0; 1)$ уравнение имеет 2 корня

$\sqrt[3]{x} = 10x, x = 1000x^3, x = 0, x = \sqrt[3]{0,001}$. На всех остальных промежутках $[n, n+1)$, где $n = -1000, \dots, -1, 1, \dots, 999$, уравнение имеет один корень. В итоге имеем 2000 корней.

Ответ: 2000

3. Решите неравенство $2\sqrt{x^2}\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{6x^2} + \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{3}|x| - \left(\frac{1}{x^2} - 3\right)\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$.

В ответ запишите сумму всех целых значений x , удовлетворяющих этому неравенству. (6 баллов)

Решение. $\left(\arcsin\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\left(2|x| + \frac{1}{x^2} - 3\right) \geq 0$,

$$1. \begin{cases} \arcsin\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \geq 0, \\ 2|x| + \frac{1}{x^2} - 3 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1; 2], \\ \frac{(2|x|+1)(|x|-1)^2}{x^2} \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 2]. \quad \text{Целыми решениями}$$

являются 1 и 2.

$$2. \begin{cases} \arcsin\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \leq 0, \\ 2|x| + \frac{1}{x^2} - 3 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2; 1], \\ \frac{(2|x|+1)(|x|-1)^2}{x^2} \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1. \quad \text{Целыми решениями являются -}$$

1 и 1.

Объединяя решения 1 и 2 случаев, получаем $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$. Их сумма равна 2.

Ответ: 2

4. Сколькими способами можно погрузить семь разных изделий (3 по 2 тонны, 4 по 1 тонне) в два фургона грузоподъемностями 6 т и 5 т, если расположение грузов внутри фургона не важно? (12 баллов)

Решение.

Решение. Груз может распределиться 6+4 или 5+5.

6 тонн	4 тонны	число способов	5 тонн	5 тонн	число способов
2 + 1 + 1 + 1 + 1	2 + 2	$C_3^1 = 3$	2 + 1 + 1 + 1	2 + 2 + 1	$C_3^1 \cdot C_4^3 = 12$
2 + 2 + 1 + 1	2 + 1 + 1	$C_3^2 \cdot C_4^2 = 18$	2 + 2 + 1	2 + 1 + 1 + 1	$C_3^2 \cdot C_4^1 = 12$
2 + 2 + 2	1 + 1 + 1 + 1	1			

Ответ: 46

5. Числа от 100 до 999 выписаны без пробелов. С каким остатком полученное 2700-значное число делится на 7? (12 баллов)

Решение.

Поскольку 1001 делится на 7, получаем $1000 \equiv -1 \pmod{7} \implies 1000^n \equiv (-1)^n \pmod{7}$.

Следовательно, выписанное число сравнимо по модулю 7 с числом

$$999 - 998 + 997 - 996 + \dots + 101 - 100 = 450 \equiv 2 \pmod{7}.$$

Ответ: 2

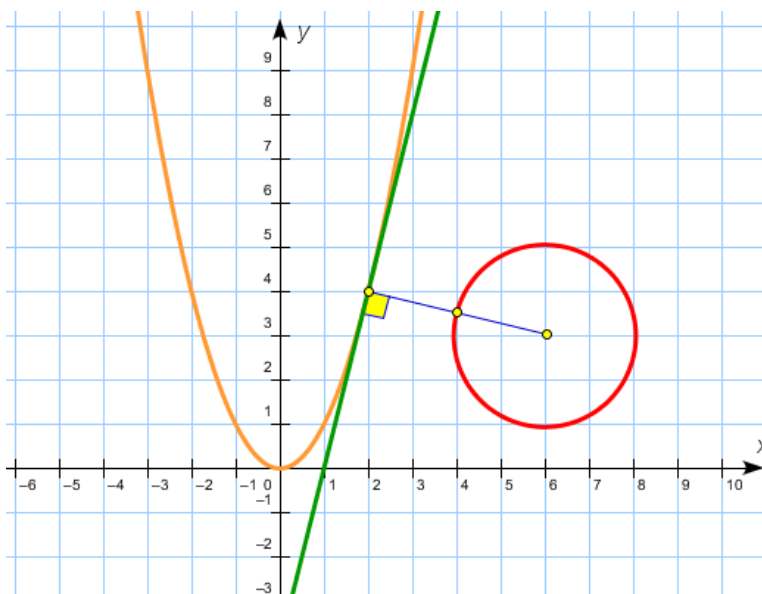
6. Какое наименьшее расстояние может быть между двумя точками, одна из которых лежит на графике функции $y = x^2$, другая — на кривой, заданной уравнением $4x^2 + 4y^2 - 48x - 24y + 163 = 0$. В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (12 баллов)

Решение.

Преобразуем уравнение второй кривой, выделив полные квадраты: $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 17/4$. Вторая кривая является окружностью с центром в точке (6; 3) и радиусом $\sqrt{17}/2$. Найдем наименьшее расстояние от центра этой окружности до точки, лежащей на параболе $y = x^2$. Квадрат расстояния от точки (6; 3) до точки $(x; x^2)$ равен $h(x) = (x - 6)^2 + (x^2 - 3)^2$. Найдем производную функции $h(x)$:

$$h'(x) = 2(x - 6) + 4x(x^2 - 3) = 4x^3 - 10x - 12 = (x - 2)(4x^2 + 8x + 6) = 0,$$

В точке $x = 2$ производная равна нулю и меняет знак с минуса на плюс, следовательно. Является точкой минимума функции $h(x)$, $h_{\min} = 17$. Наименьшее

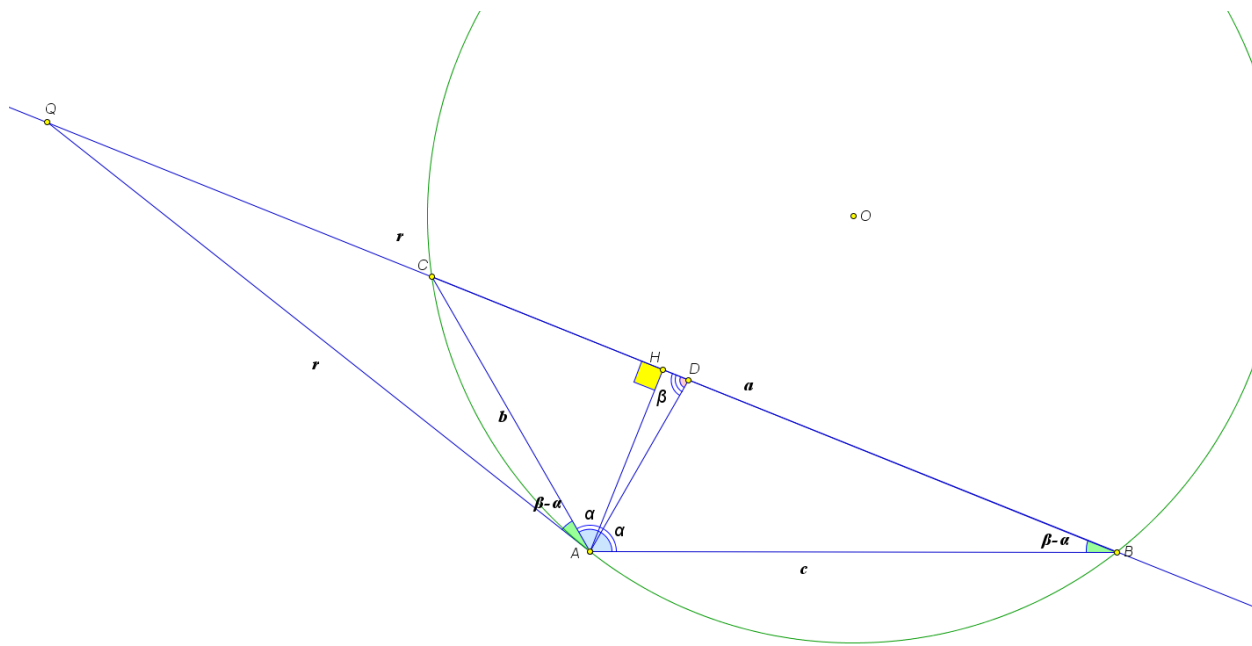


расстояние между точками на параболе и на окружности тогда будет равно $\sqrt{17}/2$, квадрат расстояния равен $17/4$ или $4,25$.

Ответ: 4,25

7. В треугольнике ABC , площадь которого равна $180\sqrt{3}$, проведены биссектриса AD и высота AH . Окружность радиуса $\frac{105\sqrt{3}}{4}$ с центром, лежащим на прямой BC , проходит через точки A и D . Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $BH^2 - HC^2 = 768$. (16 баллов)

Решение.



Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$, а радиус данной окружности равен r . Заметим, что $\beta > \alpha$ (как внешний угол треугольника ADC). Из условия следует, что $c > b$, поэтому $\angle B < \angle C$, или $\beta - \alpha < 180^\circ - \alpha - \beta$, откуда $\beta < 90^\circ$. Поскольку центр O окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде AD , то точка O лежит на луче DC . Треугольник AOD – равнобедренный, поэтому $\angle OAD = \angle ODA = \beta$, а так как $\beta > \alpha$, то точка C лежит между D и O . Значит, $\angle CAO = \beta - \alpha$. Отсюда следует, что треугольники ABO и CAO подобны по двум углам. Значит, $BO : AO = AO : CO$, или

$$\frac{r + BD}{r} = \frac{r}{r - CD}. \quad (1)$$

Поскольку AD – биссектриса треугольника ABC , то

$$BD = \frac{ac}{b+c}, \quad CD = \frac{ab}{b+c}.$$

Подставив найденные выражения в равенство (1), получим

$$\left(r + \frac{ac}{b+c}\right) \left(r - \frac{ab}{b+c}\right) = r^2, \text{ или } r(c^2 - b^2) = abc.$$

По теореме косинусов имеем

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos(ABC), c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos(ACB),$$

$$c^2 - b^2 = a(c \cos(ABC) - b \cos(ACB)) = a(BH - HC) = BC(BH - HC) = 768.$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{105\sqrt{3} \cdot 768}{16 \cdot 180\sqrt{3}} = 28.$$

Ответ: 28

8. Найдите наименьшее целое значение параметра a , при котором уравнение $x^2 + 2x + a^2 + 2a - 5 = 2 \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - ax \right)$ имеет единственное решение. Функция $f(t)$ задается соотношением $f(t) = \frac{\sqrt[3]{(27 \cdot t^2 + 4)(t + 2) + 32t}}{t - \sqrt{t^2}}$ при всех возможных значениях t .

(16 баллов)

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)$:

1. $x \neq 0$.

2. Если $x > 0 \Rightarrow x - \sqrt{x^2} = x - |x| = x - x = 0$

$$3. x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt[3]{27x^3 + 27 \cdot 2x^2 + 36x + 8}}{2x} = \frac{\sqrt[3]{(3x+2)^3}}{2x} = \frac{3x+2}{2x} = \frac{3}{2} + \frac{1}{x}.$$

Тогда уравнение переписывается в виде

$$x^2 + 2x + a^2 + 2a - 5 = 3 + 2x(1 - a) \Rightarrow x^2 + 2ax + a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$\Rightarrow D/4 = 8 - 2a, \quad x_1 \cdot x_2 = (a - 2)(a + 4), \quad x_1 + x_2 = -2a.$$

Единственное решение уравнение имеет, если

$$1) D/4 = 8 - 2a = 0 \Rightarrow a = 4, \quad x = -4.$$

$$2) \begin{cases} D/4 = 8 - 2a > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = (a - 2)(a + 4) < 0, \end{cases} \Rightarrow a \in (-4; 2).$$

$$3) \begin{cases} D/4 = 8 - 2a > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = (a - 2)(a + 4) = 0, \\ x_1 + x_2 = -2a < 0, \end{cases} \Rightarrow a = 2.$$

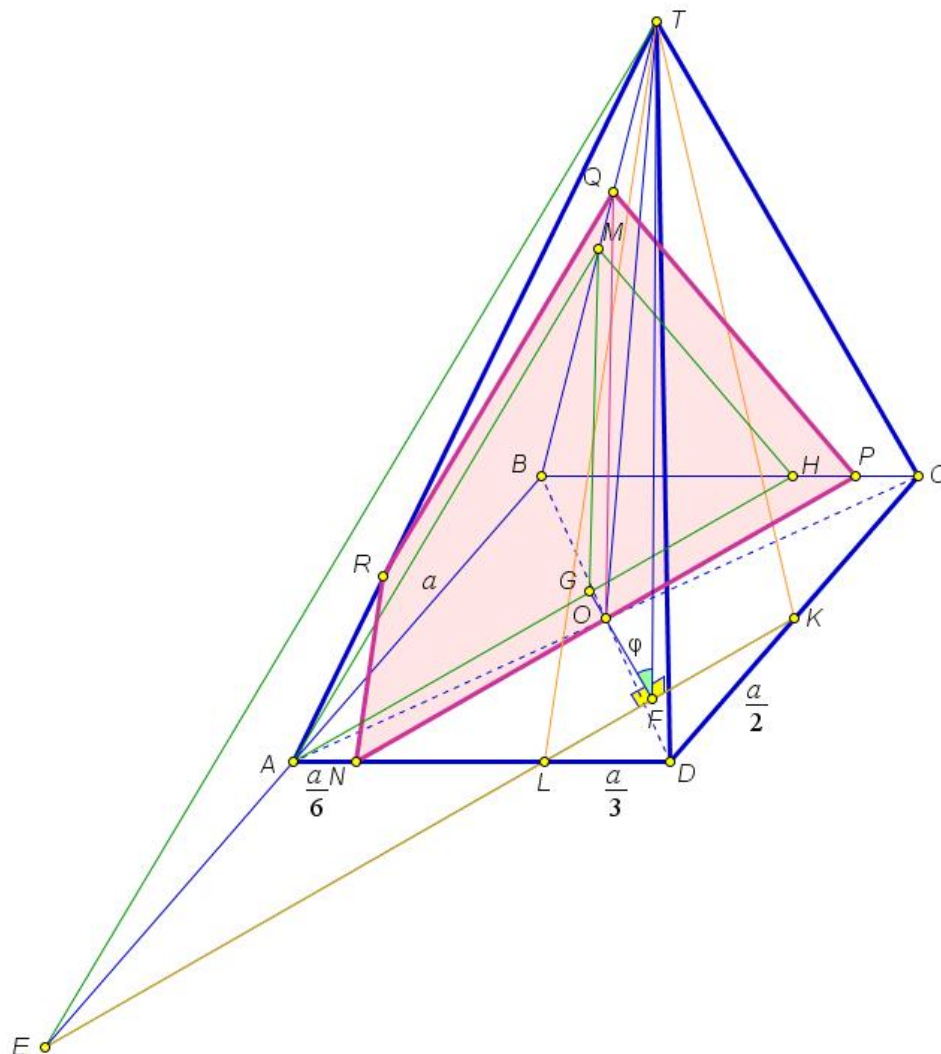
Таким образом, единственное решение возможно при $a \in (-4; 2] \cup \{4\}$.

Следовательно, наименьшее целое значение параметра при этом равно -3.

Ответ: -3

9. В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ через центр основания $ABCD$ проведено сечение плоскостью параллельно медиане AM боковой грани TAB и апофеме TK боковой грани TCD . Найдите объем пирамиды с вершиной в точке T , основанием которой является указанное выше сечение, если высота пирамиды $TABCD$ равна 12, а расстояние между прямой AM и плоскостью сечения равно $\sqrt{3}$.
(16 баллов)

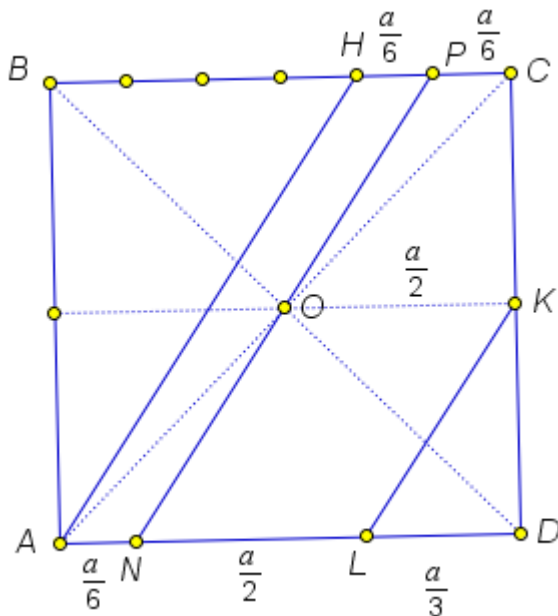
Решение. Обозначим через a длину стороны основания пирамиды.



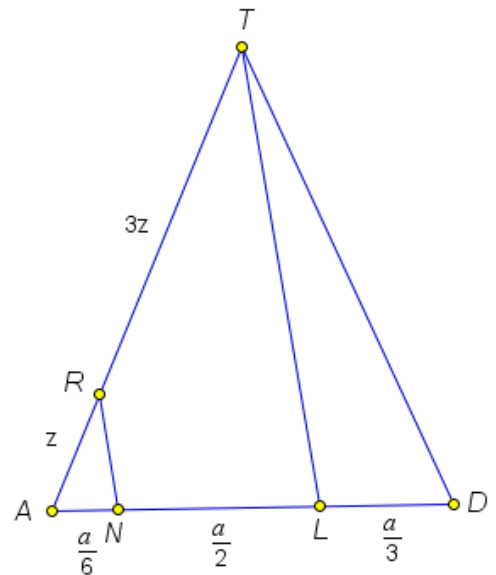
Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через TK параллельно AM . Для этого через вершину T проведем прямую TE ($E \in AB$), параллельную AM . Имеем $AE = AB$. Пусть L – точка пересечения прямой EK с AD . Получили сечение пирамиды плоскостью TKL . Плоскость сечения, о котором идет речь в условии задачи и плоскость TKL параллельны, следовательно, линии пересечения этих плоскостей с плоскостью основания пирамиды параллельны. Через точку O проведем прямую NP ($N \in AD$, $P \in BC$), параллельную LK , через точку N проведем прямую NR ($R \in AT$), параллельную TL , через точку R проведем прямую RQ ($Q \in TB$), параллельную AM . Четырехугольник $NRQP$ – искомое сечение.

Поскольку $AE : DK = 2 : 1$, то $AL : LD = 2 : 1$, $AL = \frac{2a}{3}$, $LD = \frac{a}{3}$, $AN = PC = \frac{a}{6}$.

1)

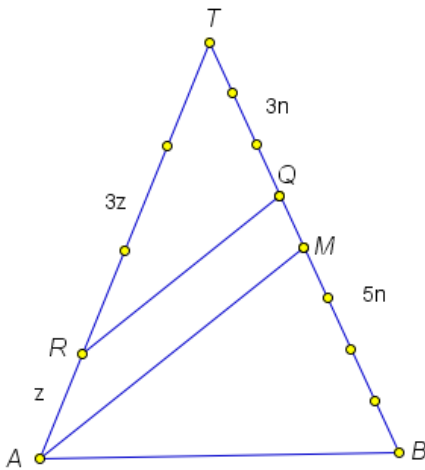


2)



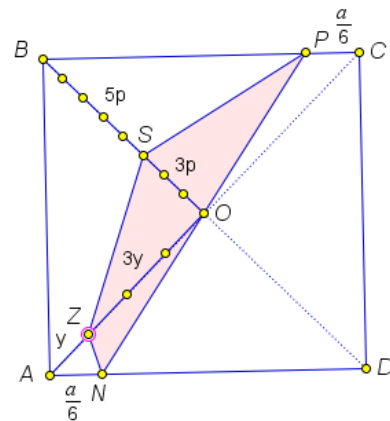
$NR \perp LT$, $AN : NL = 1:3$, $AR : RT = 1:3$.

3)



$RQ \perp AM$, $AR : RT = 1:3$, $TQ : QB = 3:5$.

4) Спроецируем сечение $NRQP$ на плоскость основания.

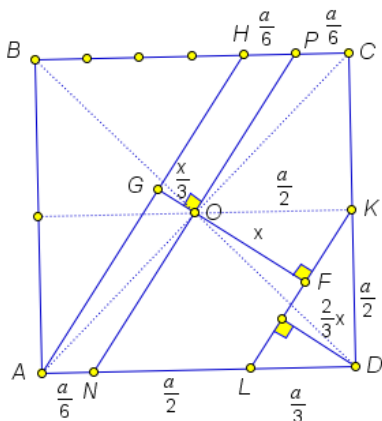


Проекцией точки R является точка Z , точки Q - точка S . $AG : GO = 1:3$, $BS : SO = 5:3$.

Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания:

$$S_{np} = \frac{a^2}{2} - \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \left(1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4} \right) = \frac{69a^2}{384}.$$

5) Найдем косинус угла φ между плоскостью сечения и основанием. Проведем $OF \perp LK$ ($F \in LK$). Обозначим OF через x .



$$\frac{2x}{3} = \frac{\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{4}}}, x = \frac{3a}{2\sqrt{13}}.$$

6)

Если ρ - расстояние между AM и плоскостью сечения, то расстояние от точки O до плоскости TLK равно 3ρ ,

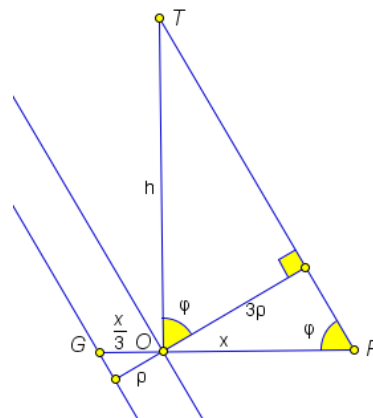
и $\cos \varphi = \frac{3\rho}{h} = \frac{3\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4},$

$$x = \frac{3a}{2\sqrt{13}} = \frac{3\rho}{\sin \varphi}, a = 8\sqrt{3}.$$

$$7) S_{сеч} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi} = \frac{4 \cdot 69a^2}{384\sqrt{3}} = \frac{138}{\sqrt{3}}.$$

$$8) V_{TNRQP} = \frac{1}{3} S_{сеч} \cdot 3\rho = 138.$$

Ответ: 138.



11 класс

Максимальная сумма баллов за 9 задач варианта – 100.

Распределение баллов по задачам следующее:

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Баллы	5	5	6	12	12	12	16	16	16

За каждую задачу выставляется либо максимальный балл в случае правильного ответа, либо 0, если ответ отсутствует или неверный.