Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

8 класс

Вариант 1.

1. Найти значение выражения $2a-\left(\frac{2a-3}{a+1}-\frac{a+1}{2-2a}-\frac{a^2+3}{2a^{2-}2}\right)\cdot\frac{a^3+1}{a^2-a}+\frac{2}{a}$ при a=1580.

Решение:

1) $2a-\frac{2(a-1)(2a-3)+(a+1)(a+1)-(a^2+3)}{2(a-1)(a+1)}\cdot\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a}+\frac{2}{a}$

2) $2a-\frac{2(a-1)(2a-3)+(a+1)(a+1)-(a^2+3)}{2(a-1)}\cdot\frac{(a^2-a+1)}{a^2-a}+\frac{2}{a}$

3) $2a-\frac{(-4a+2+2a^2)}{(a-1)}\cdot\frac{(a^2-a+1)}{a\cdot(a-1)}+\frac{2}{a}$

4) $2a-\frac{2(a-1)^2}{(a-1)}\cdot\frac{(a^2-a+1)}{a\cdot(a-1)}+\frac{2}{a}$

5) $2a-\frac{2a^2-2a+2}{a}+\frac{2}{a}$

6) $\frac{2a^2-2a^2+2a-2+2}{a}=\frac{2a}{a}$

Получаем ответ на задачу: $\frac{2a}{a}=2$

Ответ: 2

2. У прямоугольника сумма двух сторон равна 11, сумма трёх равна 19,5. Найти произведение всех возможных различных значений периметра такого прямоугольника.

Решение:

Пусть стороны прямоугольника равны a и b.

Если сумма соседних сторон равна 11, то можно составить систему, описывающую условие задачи $\begin{cases} a+b=11 \\ 2a+b=19{,}5 \end{cases}$, её решение $a=8{,}5$, $b=2{,}5$, периметр прямоугольника равен $P_1=22$.

Если же числу 11 равна сумма противоположных сторон, то возможны два варианта $\begin{cases} 2a=11 \\ 2a+b=19{,}5 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2a=11 \\ a+2b=19{,}5 \end{cases}$.

Решение первой системы $a=5{,}5$, $b=8{,}5$, периметр прямоугольника равен $P_2=28$.

Решение второй системы $a=5{,}5$, $b=7$, периметр прямоугольника равен

$P_3=25$. Произведение трёх возможных значений периметров равно $P_1\cdot P_2\cdot P_3=22\cdot 28\cdot 25=15400$.

Ответ: 15400.

3. Велосипедист проехал путь от А до В и обратно с некоторой постоянной скоростью. Пешеход прошел путь от А до В со скоростью в 3 раза меньшей скорости велосипедиста, но зато возвращался на автобусе, скорость которого в 5 раз больше скорости велосипедиста. Сколько времени затратил на путь туда и обратно пешеход, если один из них был в пути на 36 мин. дольше другого.

Решение:

$$v_{\text{в}} = x, t_{\text{в}} = \frac{S}{x} + \frac{S}{x} = \frac{2S}{x}$$

$v_n \cdot AB = \frac{x}{3}, v_n \cdot \text{BA} = 5x,$ тогда

$$t_n = \frac{S}{x/3} + \frac{S}{5x} = \frac{3S}{x} + \frac{S}{5x} = \frac{15S + S}{5x} = \frac{16S}{5x}$$

Получим $\frac{16S}{5x} - \frac{2S}{x} = \frac{36}{60}; \frac{6S}{5x} = \frac{3}{5}$, следовательно,

$\frac{S}{x} = \frac{1}{2}$ тогда $t_{\text{в}} = 2 \cdot \frac{S}{x} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ час

$t_n = 1$ч. $+ \frac{3}{5} = 1{,}6$ ч.

Ответ: 1,6 ч.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах B, C и D равны 30°, 90° и 120° соответственно. Найти длину отрезка AB, если $AD = CD = 2$.

Решение:

Продлим прямые AB и CD до пересечения в точке E, получившийся треугольник ADE равносторонний, значит $ED = EA = 2$, катет $EC = ED + DC = 2 + 2 = 4$, так как он лежит в прямоугольном треугольнике BCE напротив угла 30°, то гипотенуза $BE = 8$, а отрезок $AB = BE - EA = 8 - 2 = 6$.

Ответ: 6.

5. Найти наибольшие значение параметра a, при которых уравнение: $(|x-2| + 2a)^2 - 3(|x-2| + 2a) + 4a(3-4a) = 0$ имеет три решения.

   В ответе укажите наибольшие из них.

Решение:

Пусть $|x-2| + 2a = t$, тогда

$t^2 - 3t + 4a\,(3- 4a) = 0$

$t^2 - 2\cdot\frac{3}{2}t + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + 12a - 16a^2 = 0;$

$(t - \frac{3}{2})^2 - (\frac{9}{4} - 12a + 16a^2) = 0;$

$(t - \frac{3}{2})^2 - (4a - \frac{3}{2})^2 = 0;\ (t - \frac{3}{2} + 4a - \frac{3}{2})\cdot(t - \frac{3}{2} - 4a + \frac{3}{2}) = 0;$

$(t + 4a - 3)\cdot(t - 4a) = 0$

Получим $(|x\text{-}2| + 2a + 4a - 3)\cdot(|x\text{-}2| + 2a - 4a) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} |x-2| + 6a - 3 = 0 \\ |x-2| - 2a = 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{6}\cdot|x-2| + \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2}\cdot|x-2| \end{array}\right.$$

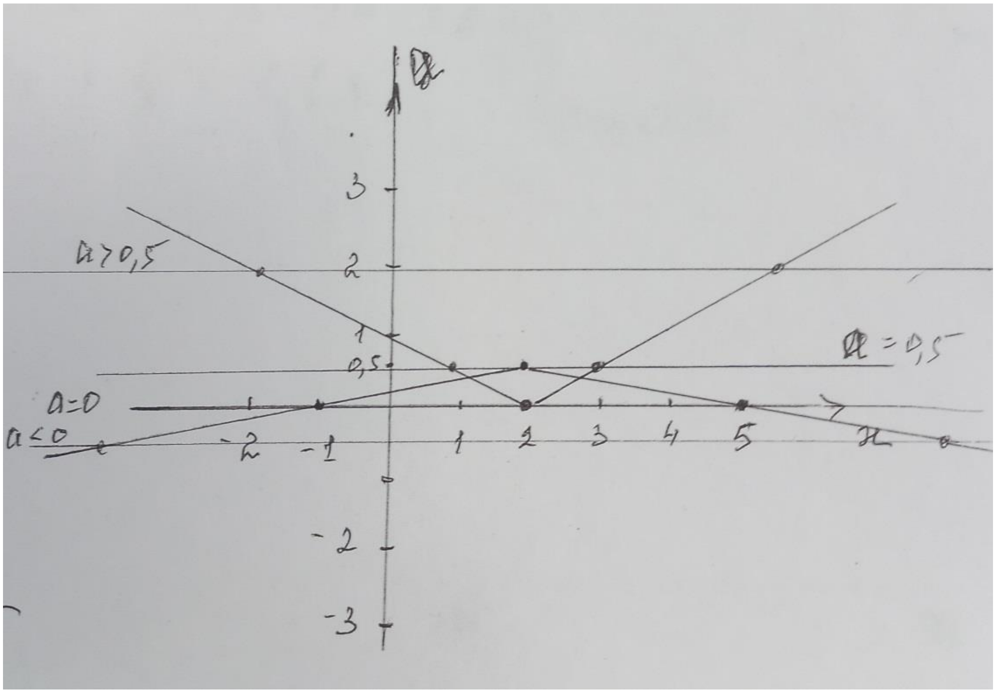
Построим графики уравнений

$a = -\frac{1}{6}|x\text{-}2| + \frac{1}{2}$ и

$a = \frac{1}{2}|x\text{-}2|$ в системе XOA

Уравнение имеет три решения при

$a = 0$, $a = 0{,}5$



Ответ: 0,5

6.Тест состоит из вопросов с 4 вариантами ответа, только один ответ на каждый вопрос - правильный. С вероятностью 2/3 Илья знает правильный ответ на вопрос, в противном случае он отмечает случайный вариант ответа. Если на какой-то вопрос Илья дал верный ответ, с какой вероятностью ответ на этот вопрос он отгадал? (Ответ округлите до сотых)

Решение:
Правильный ответ Илья мог получить 2 способами:
1) Если он знал этот ответ, то вероятность была $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$
2) Если он угадывал ответ на этот вопрос, то вероятность была $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

Получаем ответ на задачу: $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{12}} = \frac{1}{9}$

Ответ: 0.11

7. Для приготовления водного раствора кислоты взяли 3л. 30% и 5л. 46% раствора кислоты. Затем часть полученной смеси вылили и добавили такое же количество воды, в результате чего получился 25% раствор кислоты. Сколько литров воды было добавлено.

№ раствора	V раствора (л)	Кислота (л.)	Кислота %
1.	3	3 : 100 · 30 = 0,9	30%
2.	5	5 : 100 · 46 = 2,3	46%
3.	3 + 5 = 8	3,2	$\frac{3,2}{8} \cdot 100 = 40\%$
4.	8 – x + x	$3,2 - \frac{x}{100} \cdot 40 = 3,2 - 0,4x$	25%

$3,2 - 0,4x = \frac{8}{100} \cdot 25$;

$3,2 - 0,4x = 2$; $0,4x = 1,2$

$x = 3$

Ответ: 3 л.

8. В остроугольном треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$, $AC = 3$ на медиане AM отметили точку N, так что $\angle BNM = \angle MAC$. Найти длину отрезка BN.

Решение:

Сделаем дополнительное построение, удвоим медиану AM за точку M, тем самым получим точку K, такую что $K \in AM$, $KM = AM$. Треугольники KMB

и AMC равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно равны соответствующие стороны и углы: $BK = AC = 3$, $\angle MKB = \angle MAC$. Тогда получаем, что треугольник KBN равнобедренный $\angle BNM = \angle BKN$ и $BN = BK = 3$.

Ответ: 3.

9. Решить уравнение $a^2 + 2 = b!$, при условии, что a, b принадлежит N. В ответе указать сумму произведения всех возможных a и произведения всех возможных b (если уравнение не имеет решений, в ответе укажите 0, если бесконечно много решений, укажите 1000).

Решение:

$b! - 2 = a^2;\ x, y \in N$

$a \geq 1$, т.е. $a^2 \geq 1 \Rightarrow b! \geq 3$, т.е. $b \geq 3$

Если $x \geq 5$, то $x!$ оканчивается на 0, тогда y^2 оканчивается на 8, но нет такого числа, квадрат, которого оканчивается на 8, т.е. $x < 5$.

Получается:

$\left[\begin{matrix} b=3 \\ b=4 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} a^2=4 \\ a^2=22 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} a=4 \\ a=-2, \notin N \\ a=\pm\sqrt{22}, \notin N \end{matrix}\right.$, т.е. $b = 3, a = 2.$

Получаем ответ на задачу: $a + b = 2 + 3 = 5$

Ответ: 5