Решение варианта №1 (Инженерное дело – 10-11 классы)

1. На кухне в кружке Вася обнаружил недопитый остывший чай комнатной температуры (25°). Он долил в него до полной кружки кипяток из чайника (90°-100°), пригубил, и понял, что чай еще недостаточно горяч. Тогда он отпил четверть кружки и снова долил кипятку до полной кружки. После этого чай оказался нужной комфортной температуры (60°). Определите максимальный и минимальный возможные объемы недопитого остывшего чая в кружке Пети (в долях от объема кружки). /*Указание.* Уравнение теплового баланса (равновесия) для физических теплоизолированных систем из двух тел: $m_1C_1(t_1 - t) = m_2C_2(t - t_2)$, где m_1 и m_2 — массы, t_1 и t_2 — исходные температуры, C_1 и C_2 — удельные теплоемкости тел, а t — установившаяся в результате теплообмена равновесная (одинаковая) температура взаимодействующих тел. Считать, что плотность и теплоемкость чая любой концентрации и чистой воды одинаковы, а температура кипятка в первом и во втором случаях не меняется./ (10 баллов)

Решение. Из приведенного уравнения теплового баланса (равновесия) для физических теплоизолированных системах из двух тел следует, что при равной теплоемкости тел получаем конечную равновесную температуру:

$$t = \frac{m_1t_1 + m_2t_2}{m_1 + m_2},$$

или через объемы (при равенстве плотностей тел):

$$t = \frac{V_1t_1 + V_2t_2}{V_1 + V_2}.$$

Пусть V — неизвестный объем (в кубических сантиметрах) кружки Васи, $V_0 = pV$ — начальный объем остывшего чая, $0 < p < 1$, θ — неизвестная равновесная температура чая после 1-го доливания кипятка, и t_k — неизвестная температура кипятка в чайнике. Тогда из уравнения равновесия после 1-го доливания кипятка получаем:

$$\theta = \frac{V_0 \cdot 25 + (V - V_0)t_k}{V_0 + (V - V_0)} = 25p + (1-p)t_k < 60.$$

После 2-го переливания имеем:

$$60 = \frac{\frac{3}{4} \cdot V \cdot \theta + \frac{1}{4} \cdot V \cdot t_k}{\frac{3}{4} \cdot V + \frac{1}{4} \cdot V} = \frac{3}{4} \cdot \theta + \frac{1}{4} \cdot t_k.$$

Таким образом, получаем следующую систему уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} \theta = 25p + (1-p)t_k, \\ 60 = \frac{3}{4}\cdot\theta + \frac{1}{4}\cdot t_k, \\ 0 < p < 1, \\ 0 < \theta < 60 \\ 90 \leqslant t_k \leqslant 100. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем:

$$60 = \tfrac{3}{4}\big[25p + (1-p)t_k\big] + \tfrac{1}{4}t_k, \quad 240 = \big[75p + 3(1-p)t_k\big] + t_k,$$

$$240 = 75p + (4-3p)t_k, \quad t_k = \frac{240-75p}{4-3p}.$$

Отсюда:

$$\theta = 25p + (1-p)t_k = 25p + (1-p)\left(\frac{240-75p}{4-3p}\right) =$$

$$= \frac{25p(4-3p) + (1-p)(240-75p)}{4-3p} = \frac{5(48-43p)}{4-3p}.$$

Решая неравенство $0 < \theta < 60$ при $0 < p < 1$, находим:

$$0 < \frac{5(48-43p)}{4-3p} < 60, \quad 0 < 5(48-43p) < (4-3p)60,$$

$$0 < 48 - 43p < (4-3p)12, \quad 0 < 48-43p < 48-36p, \quad 0 < p < 1.$$

Значит, условие $0 < \theta < 60$ не накладывает никаких ограничений на искомую долю p: $0 < p < 1$.

Рассмотрим последнее условие: максимальная температура кипятка не может быть больше $100°$:

$$90 \leqslant t_k \leqslant 100, \quad 90 \leqslant \frac{240-75p}{4-3p} \leqslant 100, \quad 360 - 270p \leqslant 240 - 75p \leqslant 100(4-3p),$$

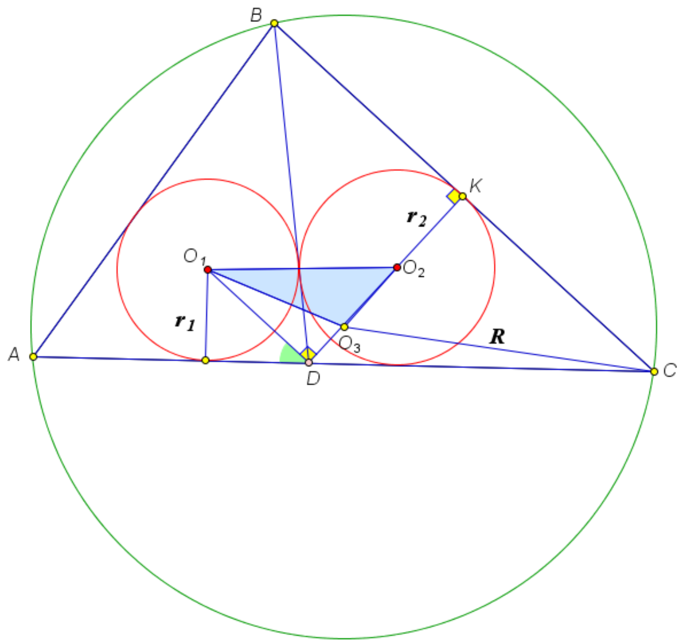
$$120 \leqslant 195p, \quad 225p \leqslant 160, \quad \tfrac{8}{13} \leqslant p \leqslant \tfrac{32}{45}.$$

Ответ: минимальное значение - $\frac{8}{13}$, максимальное значение - $\frac{32}{45}$.

2. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 12$, $BC = 15$, $AC = 18$ проведена биссектриса BD. В треугольники ABD и BCD вписаны окружности с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно. Найдите площадь треугольника $O_1O_2O_3$, где O_3 - центр окружности, описанной около треугольника ABC. (10 баллов)

Решение. 1) Найдем длину биссектрисы BD по формуле $BD = \sqrt{AB\cdot BC - AD\cdot DC}$. По свойству биссектрисы $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$. Пусть $AD = x$. Тогда $\dfrac{12}{15} = \dfrac{x}{18-x}$, $\quad x = 8$.

$AD = 8,\ DC = 10,\ BD = \sqrt{12\cdot 15 - 8\cdot 10} = 10.$ Треугольник BCD - равнобедренный, $BD = CD.$



2) Найдем радиусы r_1 и r_2 окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD.

Для треугольника ABD имеем:
$p_1 = 15,$ по формуле Герона
$S_1 = \sqrt{15\cdot 3\cdot 5\cdot 7} = 15\sqrt{7}$, $r_1 = \dfrac{S_1}{p_1} = \sqrt{7}.$

Для треугольника BCD имеем:
$p_2 = \dfrac{35}{2}$, по формуле Герона
$S_2 = \sqrt{\dfrac{35}{2}\cdot\dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{5}{2}} = \dfrac{75}{4}\sqrt{7}$, $r_2 = \dfrac{S_2}{p_2} = \dfrac{15}{14}\sqrt{7}.$

3) Найдем радиус R окружности, описанной около треугольника $ABC.$
$S_{ABC} = \dfrac{135}{4}\sqrt{7},\quad R = \dfrac{AB\cdot AC\cdot BC}{4S_{ABC}} = \dfrac{12\cdot 15\cdot 18}{135\sqrt{7}} = \dfrac{24\sqrt{7}}{7}.$

4) Центр O_3 окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой DK, где K - середина отрезка BC, $DK \perp BC.$ Найдем O_3K: $O_3K = \sqrt{R^2 - BK^2} = \sqrt{\dfrac{24^2}{7} - \dfrac{15^2}{4}} = \dfrac{27\sqrt{7}}{14}.$

5) $O_2O_3 = O_3K - r_2 = \dfrac{27\sqrt{7}}{14} - \dfrac{15\sqrt{7}}{14} = \dfrac{6\sqrt{7}}{7}.$

6) $O_1D \perp DK$, O_1D - высота треугольника $O_1O_2O_3$, $S_{O_1O_2O_3} = \dfrac{1}{2}O_2O_3\cdot O_1D.$

7) $O_1D = \dfrac{r_1}{\sin\alpha},\quad \alpha = \dfrac{\angle ADB}{2}.$ По теореме косинусов найдем

$\cos\angle ADB = \cos 2\alpha = \dfrac{AD^2 + DB^2 - AB^2}{2AD\cdot DB} = \dfrac{64 + 100 - 144}{160} = \dfrac{1}{8},\quad \sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{4},$

$O_1D = 4.$

8) $S_{O_1O_2O_3} = \dfrac{1}{2}O_2O_3\cdot O_1D = \dfrac{12\sqrt{7}}{7}.$ **Ответ:** $\dfrac{12\sqrt{7}}{7}$

3. Найдите все значения x, при которых неравенство

$(a+2)x-(1+2a)\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+a^2+4a-5>0$ выполняется хотя бы для одного $a\in[-2;1]$.

(10 баллов)

Решение:

Сделаем замену переменного $t=\sqrt[3]{x}$. Тогда исходное неравенство равносильно следующему $(a+2)t^3-(1+2a)t^2-6t+a^2+4a-5>0$, или $a^2+a(t^3-2t^2+4)+2t^3-t^2-6t-5>0$. Найдем те значения t, при которых для всех $a\in[-2;1]$ выполняется неравенство

$a^2+a(t^3-2t^2+4)+2t^3-t^2-6t-5\le 0$.

Обозначим $f(a)=a^2+a(t^3-2t^2+4)+2t^3-t^2-6t-5$. Графиком квадратичной функции $f(a)$ является парабола с ветвями, направленными вверх. Тогда неравенство $f(a)\le 0$ будет выполнятся для всех $a\in[-2;1]$ в том случае, если

$$\begin{cases} f(-2)\le 0, \\ f(1)\le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2(t^3-2t^2+4)+2t^3-t^2-6t-5\le 0, \\ 1+t^3-2t^2+4+2t^3-t^2-6t-5\le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2-6t-9\le 0, \\ 3t^3-3t^2-6t\le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-2t-3\le 0, \\ t(t^2-t-2)\le 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$t\in\{-1\}\cup[0;2]\Leftrightarrow x\in\{-1\}\cup[0;8]$.

Тогда исходное неравенство выполняется хотя бы для одного $a\in[-2;1]$, если $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(8;+\infty)$. **Ответ:** $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(8;+\infty)$.

4. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ с углом A, равным $60°$, и диагоналями, равными 7 и $\sqrt{91}$. Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной диагонали основания BD и проходящей через точку M, лежащую на ребре SC, $MC=3SM$, и точку P, лежащую на высоте пирамиды SO, причем $SP:PO=2:3$, если расстояние от точки S до плоскости сечения равно $\sqrt{3}/2$. (10 баллов)

Решение. Построим сечение пирамиды. Пусть $P\in SO$, $SP:PO=2:3$, а $M\in SC$, $MC=3SM$. В плоскости ASC проведем прямую MP. Пусть прямая MP пересекает прямую AC в точке A_1.

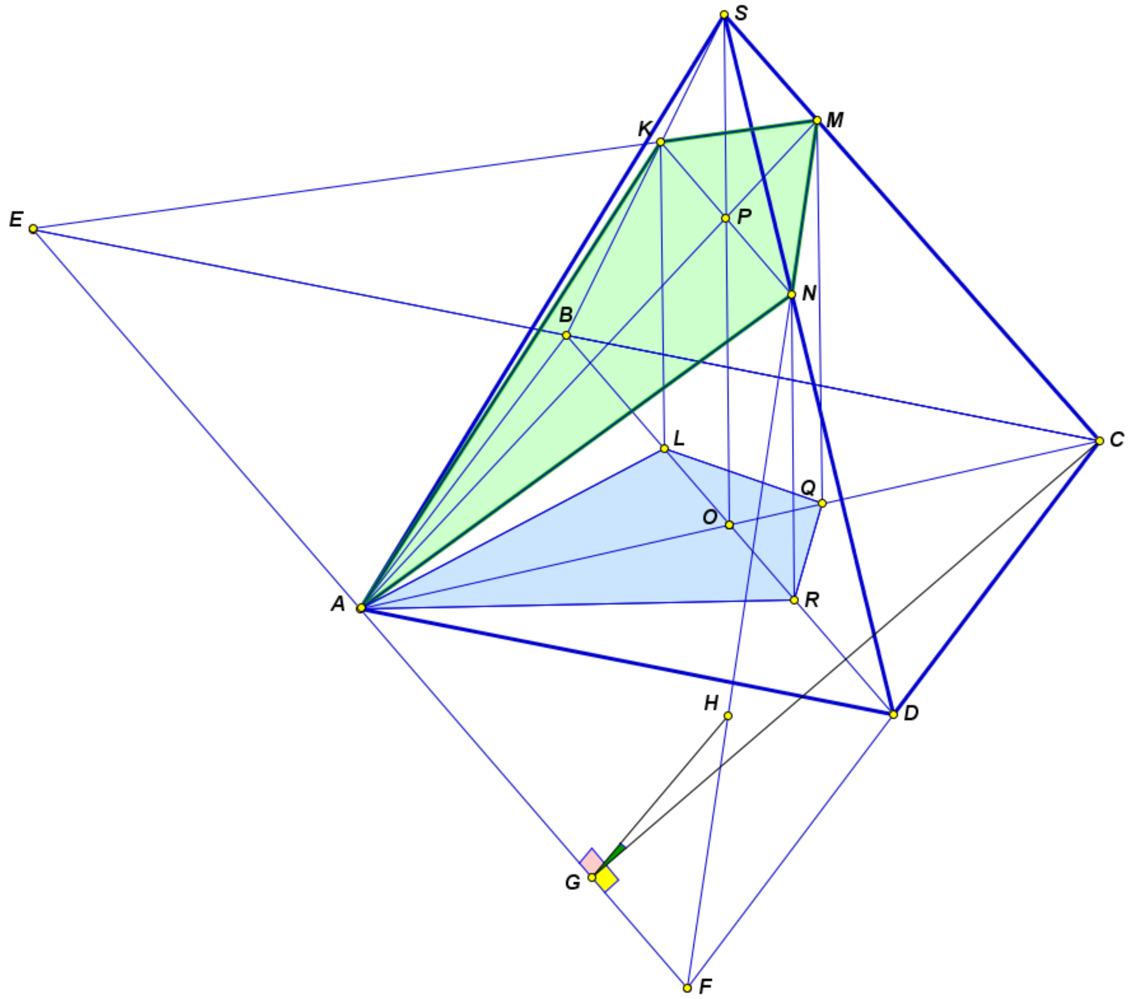
Тогда по теореме Менелая $\frac{SM}{MC}\cdot\frac{CA_1}{A_1O}\cdot\frac{OP}{PS}=1$, $\frac{1}{3}\cdot\frac{CA_1}{A_1O}\cdot\frac{3}{2}=1$, $CA_1=2A_1O, CO=A_1O$, $A_1=A$.

Следовательно, сечение проходит через точку A. В плоскости BSD через точку P проведем прямую KN, параллельную BD, $K\in BS$, $N\in SD$, $\frac{SK}{KB}=\frac{SN}{ND}=\frac{2}{3}$. Искомое сечение – четырехугольник $AKMN$.

Найдем стороны параллелограмма $ABCD$. Обозначим $AB=a$, $AD=b$, $\angle A=\alpha$, $\alpha=60°$. Пусть для определенности $a<b$. Тогда

$$\begin{cases} a^2+b^2-ab=49, \\ a^2+b^2+ab=91, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2+3b^2-10ab=0, \\ a^2+b^2+ab=91, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3a, \\ a=\sqrt{7}. \end{cases}$$

Площадь сечения $AKMN$ будем вычислять по формуле $S_{сеч} = \dfrac{S_{пр}}{\cos\varphi}$, где $S_{пр}$ - площадь проекции сечения на плоскость основания, φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания. Проекцией является четырехугольник $ALQR$. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S = AB \cdot AD \sin\alpha = 3a^2 \sin\alpha$, $S = 21\sqrt{3}/2$.



Площадь проекции сечения вычисляется по формуле

$$S_{пр} = 2(S_{AOR} + S_{ROQ}) = \frac{S}{2}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\right) = \frac{S}{4} = \frac{21\sqrt{3}}{8}.$$

Плоскость сечения и плоскость основания пересекаются по прямой EF, параллельной BD и проходящей через точку A. Пусть CG – перпендикуляр к прямой EF, $H \in MF$, $HG \perp EF$. Угол CGH – угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, он равен φ.

Расстояние от точки S до плоскости сечения равно трети расстояния от точки C до плоскости сечения и равно $d=\sqrt{3}/2$. Расстояние от точки C до плоскости сечения равно $3d=3\sqrt{3}/2$.

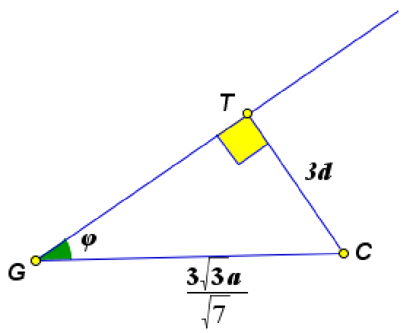
Отрезок CG – высота треугольника ECF, $EF\cdot CG=EC\cdot CF\sin\alpha$,

$$CG=\frac{EC\cdot CF\sin\alpha}{EF}=\frac{2BC\cdot 2CD\sin 60^\circ}{\sqrt{4BC^2+4CD^2-2\cdot 4BC\cdot CD\cos 60^\circ}}=\frac{BC\cdot CD\sqrt{3}}{\sqrt{BC^2+CD^2-BC\cdot CD}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}a.$$

Проведем перпендикуляр CT к прямой GH, длина этого перпендикуляра равна $3d$. Тогда

$$\sin\varphi=\frac{CT}{CG}=\frac{3d\sqrt{7}}{3\sqrt{3}a}=\frac{1}{2},\quad \varphi=30^\circ,\quad \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{сеч}=\frac{S_{пр}}{\cos\varphi}=\frac{21}{4}=5,25.$$



Ответ: $5,25$.

5. По просьбе мамы Вася купил в магазине пачку кускового (прессованного) быстрорастворимого сахара и увидел надпись: «336 кусочков сахара» (см. рис). Вася любит математику и головоломки, и поэтому решил, не вскрывая пачку, выяснить, во сколько рядов (слоев) уложены кусочки сахара в пачке по высоте, по ширине и по длине. Для этого Вася линейкой измерил внешние размеры пачки, сделанной из тонкой плотной бумаги (оказалось 60 мм, 120 мм и 180 мм), а по изображению на пачке уверенно смог установить лишь то, что кусочки сахара имеют форму одинаковых параллелепипедов, неизвестные длины сторон x, y и z которых находятся в соотношениях $1<\frac{y}{x}<\frac{3}{2}$, $1<\frac{z}{y}<\frac{3}{2}$. Кроме того, Вася вспомнил, как папа удивлялся тому, что кусочки сахара расположены в пачке «как бы наоборот»: вдоль короткой стороны пачки кусочки сахара уложены своей длинной стороной, а вдоль длинной стороны пачки — своей короткой стороной. Помогите Васе решить его задачу.

Решение:

Пусть $X = 60$ мм, $Y = 120$ мм и $Z = 180$ мм — известные длины сторон пачки сахара. Тогда, пренебрегая толщиной бумаги и учитывая наблюдение папы, имеем:

$$x = \frac{Z}{n_3} = \frac{180}{n_3}, \quad y = \frac{Y}{n_2} = \frac{120}{n_2}, \quad z = \frac{X}{n_1} = \frac{60}{n_1},$$

где n_1, n_2 и n_3 — искомые количества рядов (слоев), в которые уложены кусочки сахара в пачке по, соответственно, высоте (короткой стороне пачки), ширине (средней стороне пачки) и длине (длинной стороне пачки). Тогда из условия задачи получаем исходную систему:

$$\begin{cases} 1 < \frac{120}{180} \cdot \frac{n_3}{n_2} < \frac{3}{2}, \\ 1 < \frac{60}{120} \cdot \frac{n_2}{n_1} < \frac{3}{2}, \\ 336 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3, \end{cases}$$

из которой получаем:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} < \frac{n_3}{n_2} < \frac{9}{4}, \\ 2 < \frac{n_2}{n_1} < 3, \\ 336 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3}{2} < \frac{n_3}{n_2} < \frac{9}{4}, \\ \frac{1}{3} < \frac{n_1}{n_2} < \frac{1}{2}, \\ 336 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3}{2}n_2 < n_3 < \frac{9}{4}n_2, \\ \frac{1}{3}n_2 < n_1 < \frac{1}{2}n_2, \\ 336 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3. \end{cases} \quad (*)$$

И следовательно:

$$\begin{cases} 336 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 < \frac{1}{2}n_2 \cdot n_2 \cdot \frac{9}{4}n_2 = \frac{9}{8}\, n_2^3, \\ 336 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 > \frac{1}{3}n_2 \cdot n_2 \cdot \frac{3}{2}n_2 = \frac{1}{2}\, n_2^3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} {n_2}^3 > 336 \cdot \frac{8}{9} = 298\frac{2}{3} > 298 > 216 = 6^3, \\ {n_2}^3 < 336 \cdot 2 = 672 < 729 = 9^3, \end{cases}$$ $6 < n_2 < 9$. Следовательно, $n_2 = 7$ или $n_2 = 8$.

1) $n_2 = 7$ Подставим в систему (*):

$$\begin{cases} 10{,}5 < n_3 < 15{,}75, \\ 2\frac{1}{3} < n_1 < 3{,}5, \\ n_1 n_3 = 48. \end{cases}$$ Целых решений нет.

2) $n_2 = 8$ Подставим в систему (*):

$$\begin{cases} 12 < n_3 < 18, \\ 2\frac{2}{3} < n_1 < 4, \Rightarrow n_1 = 3, n_3 = 14. \\ n_1 n_3 = 42. \end{cases}$$

Ответ: 3; 8; 14.