

Задача 1 (10 баллов). На кухне в кружке Петя обнаружил недопитый остывший чай комнатной температуры (25°). Он долил в него до полной кружки кипятка из чайника (90° - 100°), пригубил, и понял, что чай еще недостаточно горяч. Тогда он отпил четверть кружки и снова долил кипятку до полной кружки. После этого чай оказался нужной комфортной температуры (60°). Определите максимальный и минимальный возможные объемы недопитого остывшего чая в кружке Пети (в долях от объема кружки). /Указание. Уравнение теплового баланса (равновесия) для физических теплоизолированных систем из двух тел: $m_1C_1(t_1 - t) = m_2C_2(t - t_2)$, где m_1 и m_2 — массы, t_1 и t_2 — исходные температуры, C_1 и C_2 — удельные теплоемкости тел, а t — установившаяся в результате теплообмена равновесная (одинаковая) температура взаимодействующих тел. Считать, что плотность и теплоемкость чая любой концентрации и чистой воды одинаковы, а температура кипятка в первом и во втором случаях не меняется./

Задача 2 (10 баллов). В треугольнике ABC со сторонами $AB = 12$, $BC = 15$, $AC = 18$ проведена биссектриса BD . В треугольники ABD и BCD вписаны окружности с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно. Найдите площадь треугольника $O_1O_2O_3$, где O_3 - центр окружности, описанной около треугольника ABC .

Задача 3 (10 баллов). Найдите все значения x , при которых неравенство

$$(a + 2)x - (1 + 2a)\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + a^2 + 4a - 5 > 0 \text{ выполняется хотя бы для одного } a \in [-2; 1].$$

Задача 4 (10 баллов). Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ с углом A , равным 60° , и диагоналями, равными 7 и $\sqrt{91}$. Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO , где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной диагонали основания BD и проходящей через точку M , лежащую на ребре SC , $MC = 3SM$, и точку P , лежащую на высоте пирамиды SO , причем $SP:PO = 2:3$, если расстояние от точки S до плоскости сечения равно $\sqrt{3}/2$.

Задача 5 (10 баллов). По просьбе мамы Вася купил в магазине пачку кускового (прессованного) быстрорастворимого сахара и увидел надпись: «336 кусочков сахара» (см. рис). Вася любит математику и головоломки, и поэтому решил, не вскрывая пачку, выяснить, во сколько рядов (слоев) уложены кусочки сахара в пачке по высоте, по ширине и по длине. Для этого Вася линейкой измерил внешние размеры пачки, сделанной из тонкой плотной бумаги (оказалось 60 мм, 120 мм и 180 мм), а по изображению на пачке уверенно смог установить лишь то, что кусочки сахара имеют форму одинаковых параллелепипедов, неизвестные длины сторон x , y и z которых находятся в соотношениях $1 < \frac{y}{x} < \frac{3}{2}$, $1 < \frac{z}{y} < \frac{3}{2}$. Кроме того, Вася вспомнил, как папа удивлялся тому, что кусочки сахара



расположены в пачке «как бы наоборот»: вдоль короткой стороны пачки кусочки сахара уложены своей длинной стороной, а вдоль длинной стороны пачки — своей короткой стороной. Помогите Васе решить его задачу.