ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

11 КЛАСС

1. На какое самое большое натуральное число будет гарантированно делиться произведение любых шести подряд идущих натуральных чисел?

Решение. Из шести подряд идущих натуральных чисел три числа делятся на 2, при этом хотя бы одно из них делится на 4. Два числа делятся на 3 и ещё одно – на 5. Следовательно произведение делится на 16, 9 и 5. А значит, на 720. Больше быть не может, так как $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Ответ: 720.

2. Пусть $A = 11111$.Найдите остаток от деления числа $(2023 \cdot A - 1)^{2024} + (2024 \cdot A + 1)^{2023}$ на число 123454321. Ответ обоснуйте.

Решение. Найдём A^2: $(11111)^2 = 123454321$. Заметим, что в выражении $(2023 \cdot A - 1)^{2024} + (2024 \cdot A + 1)^{2023}$ коэффициент при первой степени A обнулится. Тогда по свойствам остатков, остаток от деления числа $(2023 \cdot A - 1)^{2024} + (2024 \cdot A + 1)^{2023}$ на число 123454321 равен 2.

Ответ: 2.

3. Докажите неравенство $\log_2\left(1 + \frac{1}{2023}\right) + \log_2\left(2 - \frac{1}{2024}\right) > 1 + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}$.

Решение. Докажем, что $\log_2\left(1 + \frac{1}{2023}\right) > \frac{1}{2023}$. После элементарных преобразований получим сравнение числа $\left(1 + \frac{1}{2023}\right)^{2013}$ и числа 2. Очевидно, что первое число больше второго. Неравенство $\log_2\left(2 - \frac{1}{2024}\right) > 1 - \frac{1}{2024}$ доказывается аналогично предыдущему заменой $\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2024}$.

4. Известно, что система уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 3y^2 - x + y = 6 \\ -4xy - x - y = 2 \end{cases}$ имеет ровно четыре решения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$.

Найдите сумму $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + x_4 + y_4$.

Решение. Данная система линейна относительно x и x^2. Находим
$$x = \frac{3y^2 - 2y + 2}{6y - 1}, \qquad x^2 = -\frac{36y^3 - 15y^2 - 33y + 4}{3(6y - 1)}.$$
Возведя первое уравнение в квадрат, получим уравнение 4-й степени для определения y:
$$243y^4 - 162y^3 - 135y^2 + 33y + 8 = 0.$$
Корнями этого уравнения являются числа y_1, y_2, y_3, y_4. По теореме Виета их сумма равна $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{162}{243} = \frac{2}{3}$.

Аналогично, разрешив исходную систему относительно y и y^2, получим
$$81x^4 - 207x^2 - 35x + 86 = 0.$$
Отсюда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Таким образом, искомая сумма равна $\frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$.

Ответ. $\frac{2}{3}$.

5. Сравните числа $(tg1^\circ + tg2^\circ + \cdots + tg44^\circ)$ и 22.

Решение. Пусть $\alpha + \beta = 45^\circ$, $0 < \alpha, \beta < 45^\circ$. Тогда $tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha \cdot cos\beta} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot cos\alpha \cdot cos\beta}$. Далее оценим $cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$.

Так как $\alpha + \beta = 45^\circ$, $0 < \alpha, \beta < 45^\circ$, то $\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(\alpha - \beta) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

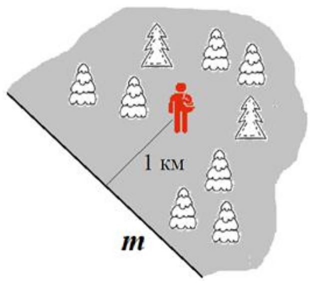
Следовательно, $cos\alpha \cdot cos\beta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $tg\alpha + tg\beta < 1$. А тогда $tg1^\circ + tg2^\circ + \cdots + tg44^\circ = (tg1^\circ + tg44^\circ) + (tg2^\circ + tg43^\circ) + \cdots + (tg22^\circ + tg23^\circ) < 22$.

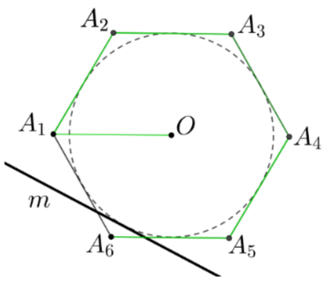
6. Придумайте какую-нибудь систему из двух уравнений с двумя неизвестными x и y, решениями которой были бы все такие пары целых чисел (x, y), которые удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y \leq 1000 - x^2 \\ y \geq x^2 \end{cases}$. Других решений у системы быть не должно.

Замечание. Уравнения системы должны быть компактными выражениями (без знаков суммирования, троеточий и т.п.), в записи которых, помимо чисел и собственно неизвестных x и y, разрешается использовать скобки, знак $=$, стандартные арифметические операции и элементарные функции из школьной программы.

Решение. Пример системы: $\begin{cases} (\sin(\pi x))\left(1+\sqrt{y-x^2}\right)=0 \\ (\sin(\pi y))\left(1+\sqrt{1000-y-x^2}\right)=0 \end{cases}.$

7. Путник заблудился в лесу, который покрывает полуплоскость, ограниченную прямой m. Он знает, что от границы леса (прямой m) он находится на расстоянии 1 км, но не знает в каком направлении граница находится. Как путнику гарантированно выйти из леса, пройдя при этом не более $4\sqrt{3}$ км? Лес очень густой, и увидеть сквозь деревья опушку невозможно (как бы близко от нее он ни находился). Поэтому считается, что путник из леса вышел, если оказался на его границе.





Решение. Проведем окружность радиуса 1 с центром в точке O, где сейчас находится путник. Эта окружность, касается прямой m. Опишем вокруг окружности правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Очевидно, что хотя бы одна его вершина окажется или на границе леса, или за его пределами (в нашем случае это A_6). Значит, побывав во всех вершинах шестиугольника, путник гарантированно из леса выйдет. Для этого надо из точки O сначала пройти в какую-либо вершину шестиугольника (например, в A_1), а затем идти вдоль ***пяти*** его сторон. Длина этого пути равна $OA_1+A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+A_4A_5+A_5A_6=\frac{2}{\sqrt{3}}+5\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$.