

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

11 КЛАСС

1. На какое самое большое натуральное число будет гарантированно делиться произведение любых шести подряд идущих натуральных чисел?

2. Пусть $A = 11111$. Найдите остаток от деления числа $(2023 \cdot A - 1)^{2024} + (2024 \cdot A + 1)^{2023}$ на число 123454321. Ответ обоснуйте.

3. Докажите неравенство $\log_2 \left(1 + \frac{1}{2023}\right) + \log_2 \left(2 - \frac{1}{2024}\right) > 1 + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}$.

4. Известно, что система уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 3y^2 - x + y = 6 \\ -4xy - x - y = 2 \end{cases}$ имеет ровно четыре решения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$.

Найдите сумму $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + x_4 + y_4$.

5. Сравните числа $(\operatorname{tg}1^\circ + \operatorname{tg}2^\circ + \dots + \operatorname{tg}44^\circ)$ и 22.

6. Придумайте какую-нибудь систему из двух уравнений с двумя неизвестными x и y , решениями которой были бы все такие пары целых чисел (x, y) , которые удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y \leq 1000 - x^2 \\ y \geq x^2 \end{cases}$. Других решений у системы быть не должно.

Замечание. Уравнения системы должны быть компактными выражениями (без знаков суммирования, троеточий и т.п.), в записи которых, помимо чисел и собственно неизвестных x и y , разрешается использовать скобки, знак $=$, стандартные арифметические операции и элементарные функции из школьной программы.

7. Путник заблудился в лесу, который покрывает полуплоскость, ограниченную прямой m . Он знает, что от границы леса (прямой m) он находится на расстоянии 1 км, но не знает в каком направлении граница находится. Как путнику гарантированно выйти из леса, пройдя при этом не более $4\sqrt{3}$ км? Лес очень густой, и увидеть сквозь деревья опушку невозможно (как бы близко от нее он ни находился). Поэтому считается, что путник из леса вышел, если оказался на его границе.

