Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 10 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Найдите сумму всех корней уравнения:

$$\sqrt{2x^2-2024x+1023131}+\sqrt{3x^2-2025x+1023132}+\sqrt{4x^2-2026x+1023133}=$$
$$=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x^2-2x+2}+\sqrt{3x^2-3x+3}.$$

(*Л. С. Корешкова*)

Решение. Заметим, что подкоренные выражения в левой части получены из соответствующих подкоренных выражений правой части прибавлением $x^2-2023x+1023130=(x-1010)(x-1013)$. Так как все подкоренные выражения положительны (это достаточно проверить для x^2-x+1 и для $2x^2-2024x+1023131=2(x-506)^2+511059$), то левая часть меньше правой при $1010<x<1013$ и больше при $x\notin[1010,1013]$. Равенство достигается только при $x=1010$ и $x=1013$, так что ответ — 2023.

Критерии. Если найден ответ, но не доказано, что других корней у уравнения нет, то не больше 2 баллов.

2. Есть 8 белых кубиков одинакового размера. Марине нужно покрасить 24 грани кубиков в синий цвет, а остальные 24 грани — в красный. После этого Катя склеивает из них куб $2\times2\times2$. Если на поверхности куба столько же синих квадратов, сколько и красных, то Катя побеждает. Если нет, то побеждает Марина. Сможет ли Марина покрасить кубики так, чтобы Катя не смогла достичь цели? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: нет.

Решение. Пусть Марина как-то покрасила кубики, а Катя как-то сложила из них куб. Пусть на поверхности куба a синих и $24-a$ красных граней. Используя идею так называемой дискретной непрерывности, покажем, что Катя может постепенно привести куб к нужному ей виду. Заметим, что каждый из 8 кубиков можно повернуть так, чтобы все его грани, которые были снаружи, оказались внутри, и наоборот. Если сделать это со всеми восемью кубиками, то на поверхности окажутся как раз все те грани, которые изначально были внутри, то есть $24-a$ синих и a красных. Заметим теперь, что каждый кубик можно поворачивать постепенно — так, чтобы за один ход две внешних грани оставались на месте и лишь третья заменялась на противоположную. При таком повороте количество синих граней на поверхности меняется не более чем на 1. Итак, изначально синих квадратов было a, в конце стало $24-a$, а при каждом действии менялось не более чем на 1. Поскольку число 12 находится между a и $24-a$, то в какой-то момент их было ровно 12.

Критерии. За идею о последовательных поворотах — 2 балла.

3. Любимая телеигра Пети называется «Лотерея на диване». В течение игры телезрители могут присылать СМС-сообщения с трёхзначными числами, содержащими только цифры 1, 2, 3 и 4. В конце игры ведущий называет трёхзначное число, также состоящее только из этих цифр. СМС считается выигрышной, если число в ней отличается от числа ведущего не более чем в одном разряде (например, если ведущий назвал число 423, то сообщения 443 и 123 выигрышные, а 243 и 224 — нет).
Петя хочет отправить как можно меньше сообщений таким образом, чтобы хотя бы одно точно было выигрышным. Сколько СМС ему придётся отправить? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 8.

Решение. Пример восьми подходящих СМС: 111, 122, 212, 221, 333, 344, 434, 443. Действительно, какое бы число ни назвал ведущий, в нём есть либо хотя бы две цифры из набора $\{1, 2\}$, либо хотя бы две из набора $\{3, 4\}$. Если третья цифра из другого набора, то заменим его на цифру из того же набора, что и другие две, причём так, чтобы сумма цифр была нечётной — обязательно получится один из указанных вариантов.

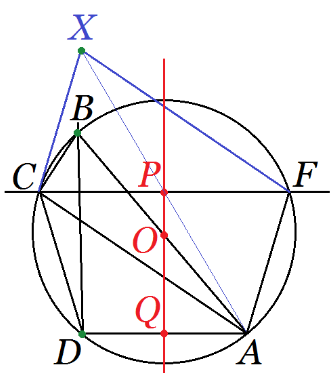
Допустим теперь, что сообщений меньше 8. Тогда на какую-то цифру (например, на цифру 1) начинается максимум одно сообщение. Не умаляя общности, пусть это сообщение 111 (если оно вообще есть). Рассмотрим варианты, когда ведущим названы числа 122, 123, 124, 132, 133, 134, 142, 143, 144. Их 9, и для каждого из них нужно отдельное сообщение (поскольку первая цифра не 1, то вторая и третья должны быть угаданы).

Замечание. Задачу можно переформулировать так: «Каким наименьшим количеством ладей можно побить шахматную доску $4 \times 4 \times 4$?». Общее решение (для доски $n \times n \times n$) приведено, например, в комментарии на http://math.hashcode.ru/questions/52123.

Критерии. За оценку даётся 4 балла, за пример — 3. За утверждение, что необходимо хотя бы 7 СМС, даётся 1 балл.

4. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$ с прямым углом ADB. Через точку C проведена прямая $l \parallel AD$, на которой отмечена такая точка F, что угол BAF равен острому углу между диагоналями AC и BD, причём F и C по разные стороны от AB. Точка X такова, что $FXCA$ — параллелограмм. Докажите, что точка X лежит на BD. (*О. А. Пляве*)

Решение. Для начала заметим, что F лежит на описанной окружности $ABCD$. Действительно, F и D лежат по разные стороны от AC и $\angle DAF + \angle DCF = \angle DAB + \angle BAF + \pi - \angle CDA = \angle DAB + \angle BAF + \frac{\pi}{2} - \angle CDB = \angle DAB + \angle BAF + \frac{\pi}{2} - \angle CAB = \angle DAC + \angle BAF + \frac{\pi}{2} = \pi$.
Обозначим через P середину CF, Q — середину AD, O — центр описанной окружности. Ясно, что они лежат на одной прямой (серединном перпендикуляре к AD). Точки X, B, D получаются из них гомотетией с центром в A и коэффициентом 2, так что они тоже лежат на одной прямой.



Критерии. Если предполагается, что B лежит между X и D или X лежит между B и D, то снимается 3 балла.

5. Решите в простых числах уравнение $a^b + a + b = b^a$. (*О. А. Пяйве, П. Д. Муленко*)

Ответ: $a = 5$, $b = 2$.

Решение. Перенесём b в правую часть и сгруппируем: $a(a^{b-1} + 1) = b(b^{a-1} - 1)$. Так как числа a и b простые и, очевидно, различные, то a не делится на b, откуда $a^{b-1} + 1 \vdots b$, что означает, что $a^{b-1} \equiv -1 \pmod b$. С другой стороны, согласно малой теореме Ферма, $a^{b-1} \equiv +1 \pmod b$. Это означает, что $-1 \equiv +1 \pmod b$ или $2 \equiv 0 \pmod b$, то есть $b = 2$.

Имеем уравнение $a^2 + a + 2 = 2^a$. Непосредственной подстановкой получаем, что $a \neq 2$, $a \neq 3$; $a = 5$ подходит ($5^2+5+2 = 32 = 2^5$). А при любом натуральном $a > 5$ это уравнение не имеет решений, ведь при увеличении a на единицу левая часть увеличивается менее, чем в два раза:
$\big((a+1)^2+(a+1)+2\big)-2(a^2+a+2) = (a^2+3a+4)-(2a^2+2a+4) = -a^2+a = -a(a-1) < 0.$

Замечание. Можно решить задачу для произвольных натуральных a и b (задача 5 для 11 класса).

Критерии. За угаданный ответ даётся 2 балла.

6. На столе лежат 28 конфет. Петя считает некоторые из них вкусными. Вася за один ход может указать любой набор конфет и спросить Петю, сколько из них вкусных. Как Васе гарантированно найти все вкусные конфеты... (а) за 21 ход; (б) за 20 ходов?

(*А. А. Теслер, Е. Ю. Воронецкий*)

Решение.

а) Разобьём конфеты на 7 групп по 4 штуки. За 3 хода можно узнать всё про данные 4 конфеты a, b, c, d, спросив, например, про наборы $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c\}$.
Если на первые два вопроса ответы будут разными, то мы узнаем, каковы конфеты a и b, а из третьего вопроса поймём, какова c. Вернувшись к первому вопросу, узнаем и про d.
Если же ответы на первые два вопроса совпадают, значит, a и b одинаковы. Если ответ на третий вопрос меньше 2, то a и b невкусные, а если 2 или более, то вкусные; вкусная ли c, определим по чётности этого ответа. И вновь, вернувшись к первому вопросу, определим, какова d.

Замечание. Подойдёт и другой набор вопросов, например, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, d\}$.

б) Возможны различные решения этого пункта. Приведём решение, позволяющее найти все конфеты даже за 19 ходов. Докажем следующее утверждение: «Если для $n > 0$ конфет задача решается за m вопросов, то для $n + 3$ конфет её можно решить за $m + 2$ вопроса». (Поскольку для одной конфеты достаточно одного вопроса, то для $28 = 1 + 9 \cdot 3$ конфет хватит $1 + 9 \cdot 2 = 19$ вопросов.)

Действительно, пусть есть способ узнать про n конфет за m вопросов, и пусть первый из этих вопросов задаётся про некое множество X. Добавим три конфеты a, b, c, а к списку вопросов добавим три вопроса про множества $\{a, c\} \cup X$, $\{b, c\} \cup X$, $\{a, b, c\}$ и *уберём* вопрос про X. По ответам на эти вопросы можно узнать, каковы конфеты a, b, c и сколько сладких конфет в X (точно так же, как в пункте **а**, только d заменяется на X).

Критерии. 2 балла за пункт (а) и 5 баллов за (б).