Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 11 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Найдите сумму всех корней уравнения:

$$\sqrt{2x^2-2024x+1023131}+\sqrt{3x^2-2025x+1023132}+\sqrt{4x^2-2026x+1023133}=$$
$$=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x^2-2x+2}+\sqrt{3x^2-3x+3}.$$

(*Л. С. Корешкова*)

Решение. Заметим, что подкоренные выражения в левой части получены из соответствующих подкоренных выражений правой части прибавлением $x^2-2023x+1023130=(x-1010)(x-1013)$. Так как все подкоренные выражения положительны (это достаточно проверить для x^2-x+1 и для $2x^2-2024x+1023131=2(x-506)^2+511059$), то левая часть меньше правой при $1010<x<1013$ и больше при $x\notin[1010,1013]$. Равенство достигается только при $x=1010$ и $x=1013$, так что ответ — 2023.

Критерии. Если найден ответ, но не доказано, что других корней у уравнения нет, то не больше 2 баллов.

2. Есть 8 белых кубиков одинакового размера. Марине нужно покрасить 24 грани кубиков в синий цвет, а остальные 24 грани — в красный. После этого Катя склеивает из них куб $2\times2\times2$. Если на поверхности куба столько же синих квадратов, сколько и красных, то Катя побеждает. Если нет, то побеждает Марина. Сможет ли Марина покрасить кубики так, чтобы Катя не смогла достичь цели? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: нет.

Решение. Пусть Марина как-то покрасила кубики, а Катя как-то сложила из них куб. Пусть на поверхности куба a синих и $24-a$ красных граней. Используя идею так называемой дискретной непрерывности, покажем, что Катя может постепенно привести куб к нужному ей виду. Заметим, что каждый из 8 кубиков можно повернуть так, чтобы все его грани, которые были снаружи, оказались внутри, и наоборот. Если сделать это со всеми восемью кубиками, то на поверхности окажутся как раз все те грани, которые изначально были внутри, то есть $24-a$ синих и a красных. Заметим теперь, что каждый кубик можно поворачивать постепенно — так, чтобы за один ход две внешних грани оставались на месте и лишь третья заменялась на противоположную. При таком повороте количество синих граней на поверхности меняется не более чем на 1. Итак, изначально синих квадратов было a, в конце стало $24-a$, а при каждом действии менялось не более чем на 1. Поскольку число 12 находится между a и $24-a$, то в какой-то момент их было ровно 12.

Критерии. За идею о последовательных поворотах — 2 балла.

3. Паша и Игорь подбрасывают монетку. Если выпадает орёл, выигрывает Паша, если решка — Игорь. В первый раз проигравший заплатил победителю 1 рубль, во второй — 2 рубля, потом — 4, и так далее (каждый раз проигравший платит в 2 раза больше, чем на прошлом шаге). В начале игры у Паши была однозначная сумма денег, а у Игоря — четырёхзначная, а в конце у Игоря стала двузначная, а у Паши — трёхзначная. Какое минимальное количество игр мог выиграть Паша? Игроки не могут уходить в минус.

(Л. С. Корешкова, А. А. Теслер)

Решение. Обозначим через n сумму денег, на которую Паша стал богаче (а Игорь — беднее). Заметим, что последнюю игру Паша выиграл (иначе за неё он потерял бы больше денег, чем приобрёл на всех предыдущих этапах). Значит, последовательность игр можно разбить на серии, в каждой из которых Паша выиграл последнюю игру и проиграл все остальные (серия может состоять и из одной игры). Если серия началась с игры номер k и окончилась игрой номер m, то Паша выиграл за неё $-2^k - 2^{k+1} - \ldots - 2^{m-2} + 2^{m-1} = 2^k$ рублей. Таким образом, двоичное представление числа n однозначно описывает набор выигранных Пашей игр (за исключением номера последней игры): слагаемое 2^k означает, что очередная серия началась с игры номер $k+1$, то есть игру номер k Паша выиграл.

По условию, $901 \leqslant n \leqslant 998$. Но все числа от 901 до 998 содержат в двоичном представлении $2^7 + 2^8 + 2^9$, поэтому Паша выиграл седьмую, восьмую, девятую игру, а также последнюю (её номер больше 9, иначе не было бы слагаемого 2^9) — уже минимум 4 игры.

Кроме этого, за первые 6 игр Паша должен был выиграть хотя бы 3 раза:
1) из первых четырёх игр выиграна хотя бы одна, так как $9 - 1 - 2 - 4 - 8 < 0$;
2) из двух следующих также выиграна хотя бы одна, так как $9 \pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm 8 - 16 - 32 < 0$;
3) если из первых четырёх выиграна только одна, то после них сумма не более 10, и пятая и шестая обязательно должны быть выиграны.

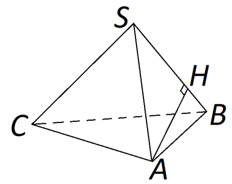
Таким образом, Паша выиграл не менее 7 игр. Вот пример для 7 игр: изначально у Паши было 9 рублей, у Игоря — 1000 рублей, всего сыграно 10 игр. Тогда $n = 985 = 2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = (-2^0 - 2^1 + 2^2) + (2^3) + (2^4) + (-2^5 + 2^6) + (2^7) + (2^8) + (2^9)$, то есть Паша выигрывал в играх с номерами $3, 4, 6, 7, 8, 9, 10$, а Игорь — в играх $1, 2, 5$. В конце у Паши окажется 994 рубля, а у Игоря — 15 рублей.

Ответ: 7 игр.

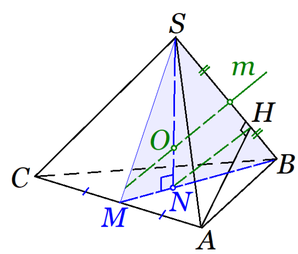
Критерии. За оценку даётся 5 баллов (из них 1 за оценку, что прошло всего хотя бы 10 игр), за пример — 2.

4. На плоскости в ортогональной проекции изображена правильная пирамида $SABC$ (с основанием ABC) и высота AH грани SAB, как показано на рисунке. Как с помощью циркуля и линейки построить изображение центра сферы, описанной возле пирамиды?

(А. А. Теслер)



Решение. Пусть M — середина AC, N — центр основания ABC. Тогда центр описанной сферы лежит на SN (поскольку пирамида правильная). Проекция M строится как середина проекции AC, а проекция N — как точка, делящая проекцию BM в отношении $2:1$.



Обозначим через m прямую, параллельную MH и проходящую через середину SB. Она проходит через центр описанной сферы: AH и CH перпендикулярны SB, так что m перпендикулярна SB, а также m пересекает SN. Проекция m строится как параллельный перенос проекции MH, проходящий через середину проекции SB. Эта проекция пересекает проекцию SN ровно в проекции центра описанной сферы.

5. Решите в натуральных числах уравнение $a^b+a+b=b^a$. (*О. А. Пяйве, Е. Ю. Воронецкий*)

Ответ: $a=5$, $b=2$.

Решение. Если $a=1$ или $b=1$, то решений нет.

Если $b=2$, то получим $2^a=a^2+a+1$. При $a<5$ решений нет, $a=5$ подходит, а при $a\geqslant 5$ левая часть увеличивается менее чем в 2 раза при увеличении a на 1.

Пусть $b\geqslant 3$. Тогда

$$b^a=a^b+a+b\leqslant a^b+ab\leqslant a^b+ba^{b-2}<\left(a+\frac{1}{a}\right)^b$$

(последнее неравенство следует из разложения по биному Ньютона для $\left(a+\frac{1}{a}\right)^b$). Значит,

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^b>b^a>a^b;$$

логарифмируя и деля на ab, получаем:

$$\frac{\ln\left(a+\frac{1}{a}\right)}{a}>\frac{\ln b}{b}>\frac{\ln a}{a}.$$

Пусть $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$. Заметим, что $f(a)$ убывает при $a\geqslant 3$ и $f(2)=f(4)$ (у этой функции производная равна $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, и она отрицательна при $x\geqslant e$). Поэтому нет решений с $a=2$, $b\geqslant 4$ и с $b\geqslant a\geqslant 3$.

С другой стороны, можно проверить, что

$$\frac{\ln\left(a+\frac{1}{a}\right)}{a}<\frac{\ln(a-1)}{a-1}$$

при $a\geqslant 4$. Действительно, при $a=4$ это

$$\left(4+\frac{1}{4}\right)^3=64+12+\frac{3}{4}+\frac{1}{64}<81=3^4,$$

и производная выражения $g(a)=a\cdot\ln(a-1)-(a-1)\cdot\ln(a+1/a)$ равна

$$g'(a)=\frac{1}{a-1}+\frac{a^2+2a-1}{a^3+a}-\ln 1+\frac{a+1}{a^2-a}.$$

Но

$$\ln 1+\frac{a+1}{a^2-a}<\frac{a+1}{a^2-a},$$

так что

$$g'(a)>\frac{a^3-3a}{a(a-1)(a^2+1)}>0$$

уже при $a\geqslant 3$.

Таким образом, уравнение не имеет решений при $a\geqslant 4$.

Замечание. Вместо оценки $(a+\frac{1}{a})^b$ можно использовать $(a+1)^b$ (верную при $b=2$), тогда упрощаются вычисления, но нужно перебирать больше исключений.

Критерии. За угаданный ответ даётся 1 балл. Рассуждение, показывающее, что хотя бы одна переменная ограничена, оценивается в 3 балла.

6. На столе лежат 28 конфет. Петя считает некоторые из них вкусными. Вася за один ход может указать любой набор конфет и спросить Петю, сколько из них вкусных. Как Васе гарантированно найти все вкусные конфеты... (а) за 21 ход; (б) за 20 ходов?

(*А. А. Теслер, Е. Ю. Воронецкий*)

Решение.

а) Разобьём конфеты на 7 групп по 4 штуки. За 3 хода можно узнать всё про данные 4 конфеты a, b, c, d, спросив, например, про наборы $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c\}$.
Если на первые два вопроса ответы будут разными, то мы узнаем, каковы конфеты a и b, а из третьего вопроса поймём, какова c. Вернувшись к первому вопросу, узнаем и про d.
Если же ответы на первые два вопроса совпадают, значит, a и b одинаковы. Если ответ на третий вопрос меньше 2, то a и b невкусные, а если 2 или более, то вкусные; вкусная ли c, определим по чётности этого ответа. И вновь, вернувшись к первому вопросу, определим, какова d.

Замечание. Подойдёт и другой набор вопросов, например, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, d\}$.

б) Возможны различные решения этого пункта. Приведём решение, позволяющее найти все конфеты даже за 19 ходов. Докажем следующее утверждение: «Если для $n > 0$ конфет задача решается за m вопросов, то для $n + 3$ конфет её можно решить за $m + 2$ вопроса». (Поскольку для одной конфеты достаточно одного вопроса, то для $28 = 1 + 9 \cdot 3$ конфет хватит $1 + 9 \cdot 2 = 19$ вопросов.)

Действительно, пусть есть способ узнать про n конфет за m вопросов, и пусть первый из этих вопросов задаётся про некое множество X. Добавим три конфеты a, b, c, а к списку вопросов добавим три вопроса про множества $\{a, c\} \cup X$, $\{b, c\} \cup X$, $\{a, b, c\}$ и *уберём* вопрос про X. По ответам на эти вопросы можно узнать, каковы конфеты a, b, c и сколько сладких конфет в X (точно так же, как в пункте **а**, только d заменяется на X).

Критерии. 2 балла за пункт (а) и 5 баллов за (б).