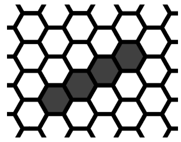
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 5 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Том и Джерри играют на бесконечном во все стороны поле из шестиугольных клеток. Изначально только 4 клетки чёрные, остальные — белые (см. рисунок). Игроки по очереди перекрашивают клетки, начиная с Тома: Том своим ходом перекрашивает одну чёрную клетку в белый цвет, а Джерри — одну белую в чёрный. При этом запрещено перекрашивать ту клетку, которую только что покрасил соперник. Если в какой-то момент на поле не окажется двух чёрных клеток, соседних друг с другом, Том выиграет. Сможет ли Джерри продолжать игру бесконечно и почему? (*О. А. Пяйве*)



Решение. После первого хода Тома в любом случае останутся две чёрные соседние клетки (назовём их клетками A и B). Джерри достаточно сделать «треугольник» из трёх клеток (то есть закрасить один из двух шестиугольников, соседних одновременно и с A, и с B — назовём его C). Какую бы клетку из этих трёх Том ни перекрасил (пусть A), две другие будут оставаться соседними, то есть Джерри не проиграет. Более того, у Джерри будет возможность «восстановить» треугольник, закрасив другой шестиугольник, соседний с B и C с другой стороны. (Если же Том перекрасил четвёртую клетку, не входящую в треугольник, то Джерри может закрасить клетку в любом месте.) Таким образом, Джерри может действовать так, чтобы игра продолжалась бесконечно.

Критерии. Верный ответ, но неверная или отсутствующая стратегия Джерри — 0 баллов.

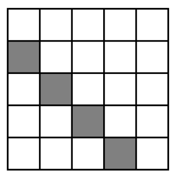
2. Есть 49 одинаковых квадратиков. Составьте из них два прямоугольника так, так чтобы их периметры отличались в 2 раза. Лишних квадратиков остаться не должно. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 7×4 и 1×21 или 1×33 и 1×16.

Решение. Сумма их площадей равна 49 ($28 + 21$ в первом варианте и $33 + 16$ во втором), и их периметры действительно отличаются в 2 раза: в первом случае $2 \cdot (7 + 4) = 22$, $2 \cdot (1 + 21) = 44$; во втором $2 \cdot (1 + 16) = 34$, $2 \cdot (1 + 33) = 68$.

Критерии. Приведен верный пример без подсчетов, показывающих, что он подходит — 5 баллов. Хотя бы одна из сторон не является целым числом — 0 баллов.

3. В клетках квадрата 5×5 стоят натуральные числа от 1 до 5 так, что в каждом столбце, каждой строке и каждой из двух главных диагоналей все числа различны. Может ли сумма чисел в клетках, закрашенных на рисунке, равняться 20? (*Л. С. Корешкова*)

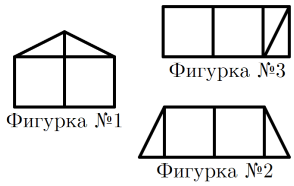


Ответ: нет.

Решение. Пусть может. Тогда, чтобы сумма чисел в закрашенных клетках равнялась 20, все числа в них должны быть «5». Тогда остаётся вписать только одно число «5», при этом обе диагонали данного числа все еще не содержат, поэтому его надо ставить в центр доски, но тогда в центральных строке и столбце будут по два числа «5». Противоречие.

Критерии. Озвучена идея, что в закрашенных клетках пятерки — 3 балла.

4. У Иры есть два одинаковых квадратика и два одинаковых треугольничка, из которых она сложила три фигурки, как показано на рисунке, а затем посчитала периметры этих фигур. У первой фигуры он оказался равен 26, у второй — 32, у третьей — 30. Найдите длины сторон треугольника. (*Л. С. Корешкова*)



Ответ: 3, 4, 5.

Решение. Обозначим стороны треугольничка: самую короткую назовём k, среднюю — c, длинную — d. Периметр фигурки №2 отличается от фигурки №1 двумя короткими сторонами треугольника, поэтому $k = (32 - 26) : 2 = 3$. Теперь можем найти среднюю сторону треугольника из фигурки №3 — действительно, её периметр состоит из двух коротких сторон и шести средних, поэтому $c = (30 - 2k) : 6 = 4$. Наконец, теперь из фигурки №1 найдём длинную сторону: $d = (26 - 4c) : 2 = 5$.

Критерии. Неверный ответ (кроме арифметической ошибки) и/или частичные рассуждения, никуда не ведущие — 0 баллов.

Верный ответ без какого-либо объяснения — 2 балла. Верный ответ с проверкой и/или подбором длин — 3 балла.

5. Участники весеннего математического лагеря в день числа π (14 марта) решили подарить друг другу квадраты, если просто знакомы, и круги, если дружат. Андрей обнаружил, что каждому мальчику подарили 3 круга и 8 квадратов, а каждой девочке — 2 квадрата и 9 кругов. А Катя подсчитала, что всего было подарено 4046 фигурок. Докажите, что кто-то из них ошибся. (*П. Д. Муленко*)

Решение. Заметим, что каждому участнику лагеря подарили ровно $3 + 8 = 2 + 9 = 11$ фигурок. Тогда общее количество фигурок равно произведению 11 на количество участников, но 4046 не делится нацело на 11.

Критерии. Идея равного количества фигурок у участников — 3 балла.

Никуда не приводящие рассуждения о количестве мальчиков и/или девочек — 0 баллов.

6. Сколько чисел от 1 до 999 без цифр «0» записываются в римской системе счисления ровно на один символ длиннее, чем в десятичной? (*П. Д. Муленко*)

Справка. Чтобы записать число римскими цифрами, надо разбить его на разрядные слагаемые, каждое разрядное слагаемое записать в соответствии с таблицей, а потом записать их последовательно от наибольшего к наименьшему. Например, пусть надо записать число 899, в соответствии с таблицей 800 = DCCC, 90 = XC, 9 = IX, получаем DCCCXCIX.

1 I	10 X	100 C	1000 M
2 II	20 XX	200 CC	2000 MM
3 III	30 XXX	300 CCC	3000 MMM
4 IV	40 XL	400 CD	
5 V	50 L	500 D	
6 VI	60 LX	600 DC	
7 VII	70 LXX	700 DCC	
8 VIII	80 LXXX	800 DCCC	
9 IX	90 XC	900 CM	

Решение. Заметим, что, независимо от разряда и других цифр числа, десятичная цифра a записывается как:

- одна римская цифра при $a = 1$ и $a = 5$,
- две римские цифры при a, равном 2, 4, 6, 9,
- три римские цифры при $a = 3$ и $a = 7$,
- четыре римские цифры при $a = 8$.

Значит, в подходящих числах используются только цифры 1, 5 и ровно одна из цифр 2, 4, 6, 9 (иначе общая длина записи будет длиннее более чем на один символ). То есть подходят 4 однозначных числа, $4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 16$ двузначных чисел и $4 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 48$ трёхзначных чисел. Итого 68 чисел.

Критерии. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

Потерян один из описанных выше случаев или учетны лишние случаи — 0 баллов.

Неверно трактовано условие про отсутствие нуля (например, как «без учета нуля», то есть что длина римской записи числа должна быть на единицу больше количества ненулевых цифр — не более 3 баллов.