Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 6 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Игорь и Паша играют в игру, по очереди ставя натуральные числа в вершины правильного шестиугольника (каждый может выбрать любую свободную вершину и поставить в неё любое натуральное число). После шести ходов, когда игра заканчивается, судья записывает на каждой стороне шестиугольника произведение чисел, стоящих в двух её концах. Затем все 12 чисел складываются. Если сумма нечётная, то выигрывает Игорь, а если чётная, то Паша.
Известно, что первым ходит Игорь. Кто из игроков сумеет выиграть при любых действиях соперника и как ему нужно действовать? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: Паша.

Решение. Пронумеруем вершины по кругу от 1 до 6 и мысленно разобьём на 3 пары диаметрально противоположных (1–4, 2–5, 3–6).

Паше, чтобы победить, следует ставить то же самое число, что поставил Игорь предыдущим ходом, во противоположную вершину. Тогда после окончания игры все числа в противоположных вершинах будут совпадать, поэтому и числа на противоположных рёбрах будут совпадать. Таким образом, сумма чисел в вершинах окажется чётной и сумма чисел на рёбрах тоже. Значит, и общая сумма будет чётной.

Критерии. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.
Если в неверной стратегии Паши фигурирует симметрия или симметричная стратегия неверно обоснована — 3 балла.

2. Есть 81 квадратик одинакового размера. Составьте из них два прямоугольника так, так чтобы их периметры были одинаковы. Лишних квадратиков остаться не должно. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 3×11 и 6×8.

Решение. Сумма их площадей равна $33 + 48 = 81$, и их периметры действительно равны: $2 \cdot (3 + 11) = 2 \cdot (6 + 8) = 28$.

Примечание. Других подходящих пар прямоугольников нет.

Критерии. Приведен верный пример без подсчетов, показывающих, что он подходит — 5 баллов.
Хотя бы одна из сторон не является целым числом — 0 баллов.

3. Восемь мальчиков (Вася, Дима, Егор, Илья, Коля, Петя, Тема и Федя) встали друг за другом в каком-то порядке, после чего рассчитались от 1 до 8, при этом:

- номер Димы оказался втрое больше номера Ильи;
- Федя встал где-то после третьего мальчика, но до Коли;
- номер Васи вдвое меньше номера Пети;

- четвёртый мальчик сразу за Тёмой и где-то до Пети.

В каком порядке встали мальчики? Объясните, почему Вы так считаете. (*П. Д. Муленко*)

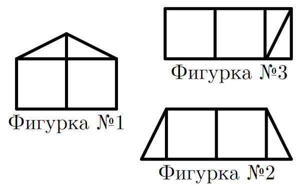
Ответ: Егор, Илья, Тёма, Вася, Федя, Дима, Коля, Петя.

Решение. Согласно четвёртому условию, Тёма стоит на третьем месте. Так как номер Димы делится на 3 по первому условию, а третий номер занят, то Дима имеет номер 6, а Илья — номер 2. Из третьего условия следует, что номер Пети — чётный и не равен 4 (так как Илья уже занял номер 2), так что Петя имеет номер 8, а Вася — 4. Тогда номера Феди и Коли получаются из второго условия, а Егор получает оставшийся номер 1.

Критерии. Правильный ответ без обоснования или только с проверкой выполнения условий — 1 балл.

Правильные объяснения расстановки пар ребят (Дима и Илья, Вася и Петя, Федя и Коля) — по 2 балла за каждую пару.

4. У Иры есть два одинаковых квадратика и два одинаковых треугольничка, из которых она сложила три фигурки, как показано на рисунке, а затем посчитала периметры этих фигур. У первой фигуры он оказался равен 74, у второй — 84, у третьей — 82. Найдите длины сторон треугольника. (*Л. С. Корешкова*)



Ответ: 5, 12, 13.

Решение. Обозначим стороны треугольничка: самую короткую назовём k, среднюю — c, длинную — d. Периметр фигурки №2 отличается от фигурки №1 двумя короткими сторонами треугольника, поэтому $k = (84 - 74) : 2 = 5$. Теперь можем найти среднюю сторону треугольника из фигурки №3 — действительно, её периметр состоит из двух коротких сторон и шести средних, поэтому $c = (82 - 2k) : 6 = 12$. Наконец, теперь из фигурки №1 найдём длинную сторону: $d = (74 - 4c) : 2 = 13$.

Критерии. Неверный ответ (кроме арифметической ошибки) и/или частичные рассуждения, никуда не ведущие — 0 баллов.

Верный ответ без какого-либо объяснения — 2 балла. Верный ответ с проверкой и/или подбором длин — 3 балла.

5. В весенний математический лагерь приехали от 50 до 70 детей. В честь дня числа π (14 марта) они решили подарить друг другу квадраты, если просто знакомы, и круги, если дружат. Андрей подсчитал, что каждому мальчику подарили 3 круга и 8 квадратов, а каждой девочке — 2 квадрата и 9 кругов. А Катя обнаружила, что всего кругов и квадратов было подарено одинаковое количество. Сколько детей приехали в лагерь? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 60.

Решение. Обозначим количество мальчиков за m, а девочек — d. Тогда $3m+9d = 8m+2d$ (число кругов равно числу квадратов). Преобразуя, имеем $5m = 7d$, то есть количества мальчиков и девочек соотносятся как $7 : 5$. Значит, общее число детей делится на 12. Между 50 и 70 подходит только число 60.

Критерии. Неверно понятое условие (например, что поровну подарили мальчикам и девочкам) — 0 баллов.

Верный ответ без объяснения — 2 балла. Верный ответ с проверкой — 3 балла.

6. Сколько чисел от 1 до 999 записываются в римской системе счисления тем же количеством символов, что и в десятичной? (*П. Д. Муленко*)

Справка. Чтобы записать число римскими цифрами, надо разбить его на разрядные слагаемые, каждое разрядное слагаемое записать в соответствии с таблицей, а потом записать их последовательно от наибольшего к наименьшему. Например, пусть надо записать число 899, в соответствии с таблицей 800 = DCCC, 90 = XC, 9 = IX, получаем DCCCXCIX.

1 I	10 X	100 C	1000 M
2 II	20 XX	200 CC	2000 MM
3 III	30 XXX	300 CCC	3000 MMM
4 IV	40 XL	400 CD	
5 V	50 L	500 D	
6 VI	60 LX	600 DC	
7 VII	70 LXX	700 DCC	
8 VIII	80 LXXX	800 DCCC	
9 IX	90 XC	900 CM	

Решение. Заметим, что, независимо от разряда и других цифр числа, десятичная цифра a записывается как:

- ноль римских цифр при $a = 0$,
- одна римская цифра при $a = 1$ и $a = 5$,
- две римские цифры при a, равном 2, 4, 6, 9,
- три римские цифры при $a = 3$ и $a = 7$,
- четыре римские цифры при $a = 8$.

Таким образом, чтобы число соответствовало условию, оно должно:

1) либо состоять **только** из цифр 1 и 5,
2) либо содержать **пару** цифр 0 и x, где x — одна из цифр 2, 4, 6 или 9 и, возможно, одну цифру 1 или 5,
3) либо состоять из одной цифры 3 или 7 и двух нулей.

Всего существует $2+2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2 = 14$ чисел первого типа и 2 числа третьего типа (DCC и CCC). Двухзачных чисел второго типа существует ровно 4, трехзначных — $2\cdot 2\cdot 4\cdot 2 = 32$ (2 способа поставить цифру «0», два способа выбрать место для односимвольной цифры, 4 способа написать двухсимвольную цифру и 2 способа — односимвольную). Всего $14 + 2 + 4 + 32 = 52$ числа.

Критерии. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

Каждый из потерянных случаев, описанных выше — -2 балла.

Арифметическая ошибка в каждом из случаев — -1 балл.