Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 7 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. В кружке по математике собралось 20 человек, среди них есть ровно 49 пар людей, которые знали друг друга до начала занятий. Докажите, что кто-то знал не более 4 участников. (*Л. С. Корешкова*)

Решение. Докажем от противного: предположим, что все знали не менее 5 людей. Тогда до начала занятий было не менее $\frac{20\cdot 5}{2} = 50$ пар знакомых людей. Противоречие.

Критерии. Задача решена в предположении, что каждый знал ровно 5 человек — 5 баллов.

2. Есть 81 квадратик одинакового размера. Составьте из них два прямоугольника так, так чтобы их периметры отличались в 2 раза. Лишних квадратиков остаться не должно. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 3×19 и 3×8 или 3×23 и 1×12.

Решение. Сумма их площадей равна 81 ($57+24$ в первом варианте и $69+12$ во втором), и их периметры действительно отличаются в 2 раза: $2\cdot(3+8)=22$, $2\cdot(3+19)=44$ или $2\cdot(1+12)=26$, $2\cdot(3+23)=52$.

Критерии. Приведен верный пример без подсчетов, показывающих, что он подходит — 5 баллов.
В решении перепутаны площади и периметры — 0 баллов.

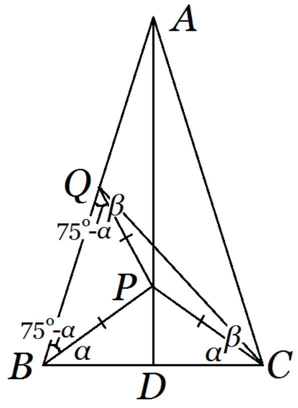
3. На доске записаны два двузначных числа. Андрей их перемножил, получилось четырёхзначное число с первой цифрой 2. Паша их сложил и получил трёхзначное число. Если из числа Андрея вычеркнуть первую цифру, получится число Паши. Какие числа были записаны? (*Л. С. Корешкова*)

Решение. Если были записаны числа x и y, то по условию $xy = 2000+x+y$, то есть $xy-x-y+1=2001$, или $(x-1)(y-1)=2001$. Так как $2001 = 3\cdot 23\cdot 29$ и x, y — двузначные, то $x-1$ и $y-1)$ может равняться 23, 29, $23\cdot 3$ или $29\cdot 3$. Значит, $x, y \in \{24, 30, 70, 88\}$. Условию удовлетворяют только пары $\{24, 88\}$ и $\{30, 70\}$.

Критерии. Среди ответов присутствует неправильный — 0 баллов.
Найдено одно из решений — 1 балл, оба решения — 2 балла при отсутствии верного доказательства отсутствия других решений.
При верном ходе решения одно из решений потеряно в силу логической ошибки в одном из случаев перебора — 5 баллов.

4. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle A = 30^\circ$, $AB = AC$. Точка D — середина BC. На отрезке AD выбрали точку P, а на стороне AB — точку Q, так что $PB = PQ$. Чему равен угол PQC? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 15°.

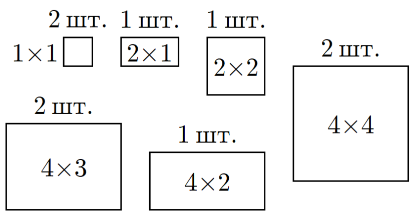


Решение. Так как D — середина основания равнобедренного треугольника, то AD — медиана, биссектриса и высота треугольника. Проведем отрезок PC. Так как $\Delta PDB = \Delta PDC$ (по двум сторонам и прямому углу между ними), то $PC = PB = PQ$, то есть все три треугольника ΔPBC, ΔPBQ и ΔPQC являются равнобедренными.

Заметим, что $\angle ABD = \angle ACB = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$. Обозначим $\angle PBD = \angle PCD = \alpha$, откуда $\angle PBQ = \angle PQB = 75^\circ - \alpha$, а $\angle PQC = \angle PCQ = \beta$. Тогда сумма углов треугольника ΔQCB равна $2\alpha + 2 \cdot (75^\circ - \alpha) + 2\beta = 180^\circ$, откуда $\beta = 15^\circ$.

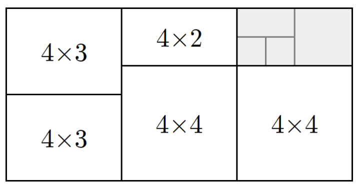
Критерии. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.
Доказано, что $PB = PC = PQ$ — 3 балла.

5. Несколько лет назад в компьютерной игре «Майнкрафт» было 9 различных картин (см. рисунок): по одной горизонтальной размерами 2×1 и 4×2 и квадратной 2×2, а также по две штуки размерами 1×1, 4×3 (горизонтальные) и 4×4. Сколькими способами все 9 картин можно разместить на прямоугольной стене размером 12 блоков в длину и 6 в высоту? Картины не должны накладываться друг на друга; поворачивать их нельзя. (*П. Д. Муленко*)

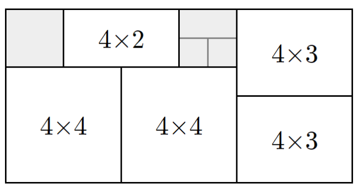


Ответ: 896.

Решение. Будем говорить, что две картины расположены в разных столбцах, если никакой блок первой картины не находится в одном столбце ни с каким блоком второй. Ясно, что картины 4×4 находятся в разных столбцах друг с другом и с картинами 4×3 при любом размещении. Таким образом, картины 4×3 обязательно будут строго друг под другом. Картины 4×4 при этом будут прижаты к полу или потолку, так как на стене ещё должны быть картины 4×2 и 2×2.



Рассмотрим случай, когда 4×2 находится строго над или под одной из картин 4×4. Ясно, что имеется $3 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 96$ способов расставить все картины ширины 4 (если объединение маленьких картин считать одной картиной 4×2, то получаем 3 способа выбрать столбец для картин 4×3, 2^2 способов выбрать прижатие к полу/потолку в каждом из других столбцов и 2^3 способов поменять друг с другом картины одного размера). Оставшиеся картины можно разместить $2^3 = 8$ способами в остатке стены 4×2, так как картины 2×2 и 2×1 должны быть в разных столбцах.



Пусть теперь картина 4×2 находится над или под сразу двумя картинами 4×4. Так как она и картины 2×2, 2×1 должны быть в разных столбцах, то имеется 16 способов расставить все картины ширины 4 (2 способа выбрать столбец для 4×3, 2 способа выбрать «потолок/пол» и $2^2 = 4$ способа переставить картины одного размера). Оставшиеся два участка 2×2 можно заполнить 8 способами.

Итого $8 \cdot (96 + 16) = 896$ вариантов.

Критерии. Показано, что три самые маленькие картины (две 1×1 и одна 1×2) можно поставить только вместе в виде квадрата 2×2 — 1 балл.

Приведены верные рассуждения о расположении картин 4×4 и 4×3 — еще 2 балла.

Любая качественная ошибка при вычислении способов расставить картины ширины 4 (например: не учтено, что количество вариантов в случаях, когда картина 4×2 расположена строго под или над картиной 4×4 либо под или над двумя из них, различно; или не учтено, что в случаях, когда картины 4×4 расположены в соседних столбцах, количество оставшихся случаев различно в зависимости от их положения (обе сверху, снизу или одна сверху, другая снизу)) — -2 балла.

Арифметическая ошибка в подсчете случаев — -1 балл.

6. В Тридевятом царстве 17 островов, на каждом из которых живут 119 человек. Жители царства делятся на две касты: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Во время переписи населения каждого человека сперва спросили: «Не считая вас, на вашем острове живёт поровну рыцарей и лжецов?». Оказалось, что на 7 островах все ответили «Да», а на остальных все ответили «Нет». Затем каждого человека спросили: «Правда ли, что, считая вас, людей вашей касты меньше половины жителей острова?». На этот раз на каких-то 7 островах все ответили «Нет», а на остальных все ответили «Да». Сколько лжецов в царстве? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 1013.

Решение.

1) Рассмотрим первый вопрос. Ответ «да» на него даст либо рыцарь на острове, где рыцарей ровно 60, либо лжец, если рыцарей иное количество. Ответ «нет» — либо лжец на острове, где рыцарей 59, либо рыцарь при ином количестве рыцарей. Значит, на 7 островах, где на первый вопрос все ответили «да», рыцарей либо 60, либо 0; на остальных 10 островах рыцарей либо 59, либо 119.
2) На второй же вопрос — независимо от того, кто отвечает — будет получен ответ «да», если рыцарей меньше половины, и «нет», если лжецов меньше половины. Значит, на 7 островах, где на второй вопрос все ответили «нет», рыцарей хотя бы 60 (то есть, или 60, или 119); а на остальных 10 островах рыцарей не более 59 (то есть, или 59, или 0).
3) Пусть на x островах 60 рыцарей, а на y островах 59 рыцарей; тогда (см. пункт 1) на $7 - x$ островах 0 рыцарей и на $10 - y$ островах 119 рыцарей. Из пункта 2 получаем: $x + (10 - y) = 7$, $y + (7 - x) = 10$. Оба уравнения равносильны равенству $y - x = 3$.
4) Считаем общее число рыцарей:

$$60 \cdot x + 59 \cdot y + (7 - x) \cdot 0 + (10 - y) \cdot 119 = 60x + 59(x + 3) + 119(7 - x) = 59 \cdot 3 + 119 \cdot 7 = 1010.$$

Значит, лжецов — 1013.

Критерии. Верно расписаны все возможные варианты количества рыцарей и лжецов на острове каждого типа — 2 балла.

Задача решена для случая, когда 7 островов в первом и втором вопросе одни и те же — 2 балла.

Задача решена верно, но в ответе указано количество рыцарей, а не лжецов — 6 баллов.