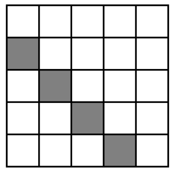
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 8 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.



1. В клетках квадрата 5×5 стоят натуральные числа от 1 до 5 так, что в каждом столбце, каждой строке и каждой из двух главных диагоналей все числа различны. Может ли сумма чисел в клетках, закрашенных на рисунке, равняться 19? (*Л. С. Корешкова*)

Решение. Пусть может. Чтобы получить сумму 19 в закрашенных клетках, там должны стоять три цифры «5» и одна цифра «4» ($19 = 5+5+5+4$). При любой расстановке цифр «5» на главной диагонали (идущей из левого нижнего угла в правый верхний) пятерку можно поставить только в правый верхний угол, но тогда на побочной диагонали (идущей из левого верхнего угла в правый нижний) пятерку поставить уже некуда. Противоречие.

Критерии. Замечено, что $19 = 5+5+5+4$ — 1 балл.

В случае перебора расстановок пятерок и четверки в закрашенных клетках, при отсутствии одного или более случаев — 5 баллов.

2. Где-то в океане есть остров Невезения, на котором расположены $2n$ городов, соединённых между собой дорогами так, что из каждого города выходит больше n дорог. Турист услышал в новостях, что какие-то два города пришлось закрыть на карантин, поэтому все дороги, ведущие к этим городам, были перекрыты. К сожалению, он не смог разобрать названия городов. Докажите, что турист, несмотря на перекрытия, всё ещё может доехать из любого незакрытого города в любой другой. (*П. Д. Муленко*)

Решение. Докажем от противного. Рассмотрим два незакрытых города А и Б. Поскольку у каждого из них не менее 11 «соседей», а всего соседей не более чем 18, то хотя бы 4 из них совпадают. Поскольку из этих совпадающих соседей не более двух закрытых, то найдётся открытый город, соседний и с А, и с Б. Через него можно попасть из А в Б.

Критерии. Задача рассмотрена только для одного примера — 0 баллов.

Задача решена в случае, когда у двух вершин степени строго $n+1$ — 6 баллов.

3. Решите уравнение: $[20x+23] = 20+23x$. Напомним, что $[a]$ обозначает целую часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. (*Л. С. Корешкова*)

Решение. Обозначим обе части уравнения через n, это целое число. Тогда $x = \frac{n-20}{23}$ и $n \leqslant 20x+23 < n+1$. Это значит, что

$$n \leqslant \frac{20(n-20)}{23} + 23 < n+1,$$

то есть

$$n \leqslant 43 < n + 7\frac{2}{3}.$$

Получается, что $x = 1 - \frac{k}{23}$ для произвольного целого $0 \leqslant k \leqslant 7$.

Ответ: $\frac{16}{23}, \frac{17}{23}, \frac{18}{23}, \frac{19}{23}, \frac{20}{23}, \frac{21}{23}, \frac{22}{23}, 1.$

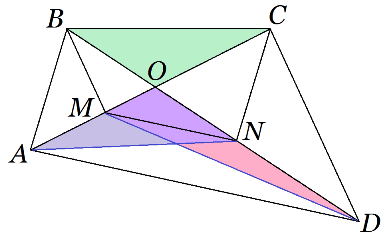
Критерии. 0 баллов — решение, в ходе которого было получено, что $x = 1$.

2 балла — получено, что x имеет вид $1 - \frac{k}{23}$.

-1 балл за каждый потерянный или лишний ответ.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$ с тупыми углами B и C. На диагоналях отмечены такие точки M и N, что $BM \parallel CD$, $CN \parallel AB$. Докажите, что $AD \parallel MN$. (*Л. С. Корешкова*)

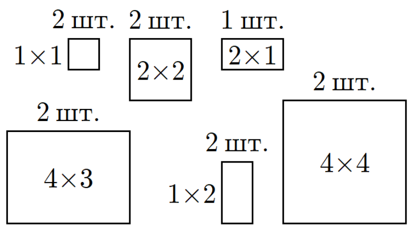
Решение.



Пусть O — точка пересечения диагоналей. $BCDM$ — трапеция ($BM \parallel DC$), поэтому треугольники MOD и BOC равновелики. (Действительно, треугольники MCD и BCD имеют равную площадь, поскольку у них общее основание CD и равные высоты; $S_{MOD} = S_{MDC} - S_{COD} = S_{BCD} - S_{COD} = S_{BOC}$.) Аналогично равновелики и треугольники AON и BOC.

То есть равновелики MOD и AON, а значит, равновелики AMN и DMN. Так как у них общее основание, то их высоты равны, то есть точки A и D находятся на равном расстоянии от прямой MN. Значит, $AD \parallel MN$, что и требовалось доказать.

5. Несколько лет назад в компьютерной игре «Майнкрафт» было 11 различных картин (см. рисунок): одна горизонтальная размерами 2×1, и по две штуки размерами 1×1, 1×2 (вертикальные), 2×2, 4×3 (горизонтальные) и 4×4. Сколькими способами все 11 картин можно разместить на прямоугольной стене размером 12 блоков в длину и 6 в высоту? Картины не должны накладываться друг на друга; поворачивать их нельзя. (*П. Д. Муленко*)

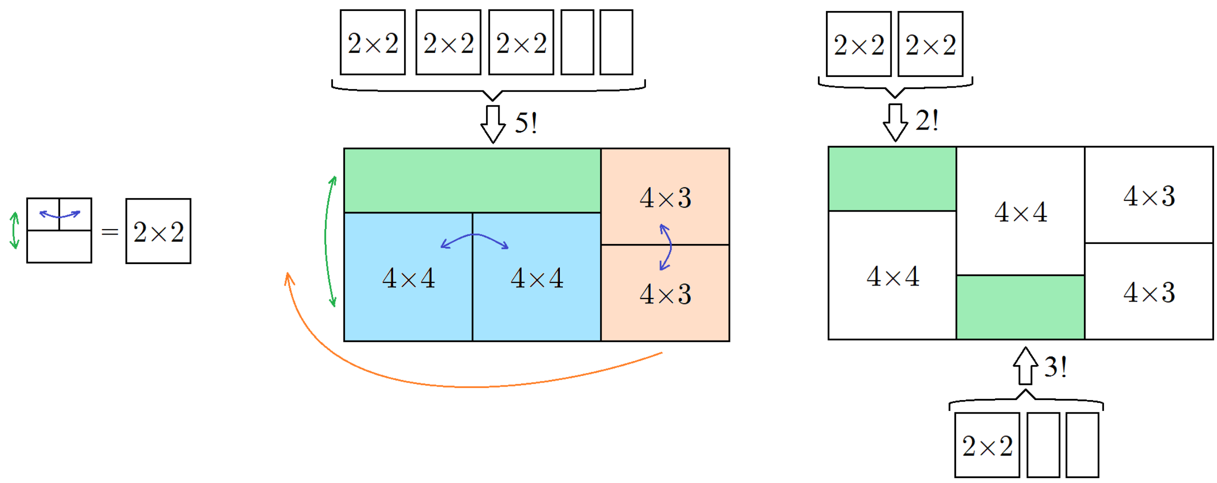


Ответ: 16896.

Решение. Будем говорить, что две картины расположены в разных столбцах, если никакой блок первой картины не находится в одном столбце ни с каким блоком второй. Ясно, что картины 4×4 находятся в разных столбцах друг с другом и с картинами 4×3 при любом размещении. Таким образом, картины 4×3 обязательно будут строго друг под другом. Обе картины 4×4 прижаты к полу или потолку, так как хотя бы в 6 столбцах должно остаться по 2 свободных соседних клетки для оставшихся картин высоты 2. Всего есть $3 \cdot 2^4 = 48$ способов так разместить картины ширины 4 (3 способа выбрать столбец с картинами 3×3, 2^2 способов выбрать «пол/потолок» в остальных столбцах, 2 способа переставить между собой картины 4×4 и ещё 2 способа переставить картины 4×3). Из них в 16 случаях остаётся пустой участок 8×2 (есть 4 «степени свободы» по 2 варианта в каждой, они показаны цветными стрелками на среднем рисунке). В остальных 32 случаях остаются два отдельных участка 4×2.

Заметим, что в любом случае картины 1×1 вместе с картиной 2×1 будут образовывать квадрат 2×2, так что можно заменить их на одну склеенную картину (а ответ для нового набора картин домножить на 4 способа её расклеить).

Если остался участок 8×2, то его надо заполнить пятью вертикальными блоками в каком-то порядке, для этого есть $5! = 120$ способов.



Рассмотрим случай, когда остаётся свободно два участка стены вида 4×2. Тогда один участок должен разбиваться на две картины 2×2, а второй — на одну картину 2×2 и две картины 1×2. Есть два способа выбрать, где какой из них, далее 3 способа выбрать, какая из картин 2×2 (включая составную) будет на втором участке; после этого — 2! способов упорядочить блоки для первого участка и 3! для второго. Итого $2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ способа.

Итого $4 \cdot (32 \cdot 72 + 16 \cdot 120) = 16896$ вариантов.

Критерии. Получено, что три самые маленькие картины (две 1×1 и одна 1×2) можно поставить только вместе в виде квадрата 2×2 — 1 балл.

Получено, что картины ширины 4 расставляются 48 способами — еще 2 балла (при ошибке в подсчете — +1 балл).

Получено, что в случае двух «окон» 4×2 есть 72 способа расставить маленькие картины — еще 2 балла (при ошибке в подсчете +1 балл).

Получено, что в случае единого пространства 8×2 есть 120 способов расставить маленькие картины — еще 2 балла (при ошибке в подсчете — +1 балл).

6. В Тридевятом царстве 17 островов, на каждом из которых живут 119 человек. Жители царства делятся на две касты: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Во время переписи населения каждого человека сперва спросили: «Не считая вас, на вашем острове живёт поровну рыцарей и лжецов?». Оказалось, что на 7 островах все ответили «Да», а на остальных все ответили «Нет». Затем каждого человека спросили: «Правда ли, что, считая вас, людей вашей касты меньше половины жителей острова?». На этот раз на каких-то 7 островах все ответили «Нет», а на остальных все ответили «Да». Сколько лжецов в царстве? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 1013.

Решение.

1) Рассмотрим первый вопрос. Ответ «да» на него даст либо рыцарь на острове, где рыцарей ровно 60, либо лжец, если рыцарей иное количество. Ответ «нет» — либо лжец на острове, где рыцарей 59, либо рыцарь при ином количестве рыцарей. Значит, на 7 островах, где на первый вопрос все ответили «да», рыцарей либо 60, либо 0; на остальных 10 островах рыцарей либо 59, либо 119.

2) На второй же вопрос — независимо от того, кто отвечает — будет получен ответ «да», если рыцарей меньше половины, и «нет», если лжецов меньше половины. Значит, на 7 островах, где на второй вопрос все ответили «нет», рыцарей хотя бы 60 (то есть, или 60, или 119); а на остальных 10 островах рыцарей не более 59 (то есть, или 59, или 0).
3) Пусть на x островах 60 рыцарей, а на y островах 59 рыцарей; тогда (см. пункт 1) на $7-x$ островах 0 рыцарей и на $10-y$ островах 119 рыцарей. Из пункта 2 получаем: $x+(10-y)=7$, $y+(7-x)=10$. Оба уравнения равносильны равенству $y-x=3$.
4) Считаем общее число рыцарей:
$$60\cdot x+59\cdot y+(7-x)\cdot 0+(10-y)\cdot 119=60x+59(x+3)+119(7-x)=59\cdot 3+119\cdot 7=1010.$$

Значит, лжецов — 1013.

Критерии. Верно расписаны все возможные варианты количества рыцарей и лжецов на острове каждого типа — 2 балла.

Задача решена для случая, когда 7 островов в первом и втором вопросе одни и те же — 2 балла.

Задача решена верно, но в ответе указано количество рыцарей, а не лжецов — 6 баллов.