Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 9 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Паша и Игорь подбрасывают монетку. Если выпадает орёл, выигрывает Паша, если решка — Игорь. В первый раз проигравший заплатил победителю 1 рубль, во второй — 2 рубля, потом — 4, и так далее (каждый раз проигравший платит в 2 раза больше, чем на прошлом шаге). После 12 игр Паша стал на 2023 рубля богаче, чем был изначально. Сколько из этих игр он выиграл? (*Л. С. Корешкова, А. А. Теслер*)

Ответ: 9 (все, кроме 4, 8 и 1024).

Решение. Нужно расставить знаки в равенстве $\pm 1 \pm 2 \pm 2^2 \pm 2^3 \pm \ldots \pm 2^9 \pm 2^{10} \pm 2^{11} = 2023$. Если выбрать все плюсы, то будет $2^0 + \ldots + 2^{11} = 2^{12} - 1 = 4095$, поэтому надо заменить плюсы на минусы перед числами с суммой $\frac{4095-2023}{2} = 1036$. Такой набор чисел только один (в силу единственности представления числа в двоичном виде): $1036 = 1024 + 8 + 4$.

Критерии. 1 балл — указано, что вся сумма денег 4095;

ещё 1 балл — найдено, что Паша выиграл 3059;

2 балла — верный ответ с примером;

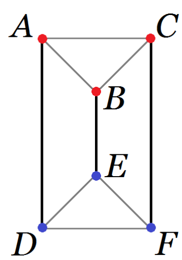
-2 балла за отсутствие доказательства единственности представления 1036.

2. Где-то в океане есть остров Невезения, на котором расположены несколько городов, соединённых между собой дорогами так, что случайный турист может попасть из любого города в любой другой. Оказалось, что если закрыть любые два города на карантин и перекрыть все ведущие в них дороги, то всё ещё можно проехать из любого из оставшихся городов в любой другой.
Турист случайным образом выбрал три дороги, никакие две из которых не ведут в один город, и хочет проехать по ним, начав и закончив свой маршрут в одном и том же городе, по пути не заезжая ни в какой из городов дважды. Всегда ли он сможет это сделать? (*Е. С. Голикова*)

Решение. Не всегда. Докажем, что для примера, показанного на рисунке (выбраны вертикальные рёбра), это не так.

1) Какие бы две дороги мы ни закрыли, граф останется связным (после закрытия одной дороги он приобретает одну из двух форм, показанных ниже; очевидно, в каждом из случаев закрытие ещё одной дороги оставит граф связным).

2) Назовём города A, B, C красными, а D, E, F синими. Если турист не попадает в один город дважды, то по каждой из выбранных дорог он должен проехать ровно один раз. Но всякий раз, когда турист проезжает по одной из выбранных дорог, цвет города меняется (а при использовании остальных дорог — нет). Поскольку выбранных дорог нечётное число, то в конце пути турист окажется в городе не того цвета, что в начале.



Критерии. 3 балла — пример; 4 балла — проверка, что он подходит под условие.

3. Решите уравнение: $[20x+23]=20+23x$. Напомним, что $[a]$ обозначает целую часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. (*Л. С. Корешкова*)

Решение. Обозначим обе части уравнения через n, это целое число. Тогда $x=\frac{n-20}{23}$ и $n \leqslant 20x+23 < n+1$. Это значит, что
$$n \leqslant \frac{20(n-20)}{23}+23 < n+1,$$
то есть
$$n \leqslant 43 < n+7\frac{2}{3}.$$
Получается, что $x=1-\frac{k}{23}$ для произвольного целого $0 \leqslant k \leqslant 7$.

Ответ: $\frac{16}{23}, \frac{17}{23}, \frac{18}{23}, \frac{19}{23}, \frac{20}{23}, \frac{21}{23}, \frac{22}{23}, 1$.

Критерии. 0 баллов — решение, в ходе которого было получено, что $x=1$.

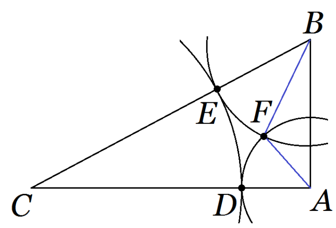
2 балла — получено, что x имеет вид $1-\frac{k}{23}$.

-1 балл за каждый потерянный или лишний ответ.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. На катете AC отмечена точка D такая, что $AD : DC = 1 : 3$, после чего построены окружности Γ_1 и Γ_2 с центрами A и C соответственно, проходящие через точку D. Γ_2 пересекает гипотенузу в точке E. Окружность Γ_3 с центром B и радиусом BE пересекает Γ_1 внутри треугольника в такой точке F, что угол AFB прямой. Найдите BC, если $AB=5$. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 13.

Решение. Обозначим $AC=x$. Тогда $AD=x/4$, $DC=CE=3x/4$, $BE=BC-CE=\sqrt{x^2+25}-3x/4$. По условию, $\angle AFB = 90^\circ$, поэтому $AF^2+FB^2=AB^2$, то есть $AD^2+BE^2=25$. Выражая всё через x и преобразуя, получаем $13x=12\sqrt{x^2+25}$. Возводя обе части в квадрат, получим $x^2=144$, то есть $x=12$ и $BC=13$.



5. Даны шесть карточек, на которых написаны цифры 1, 2, 4, 5, 8 и запятая. Из них составляются всевозможные числа (каждую карточку нужно использовать ровно один раз, запятая не может стоять в начале или в конце числа). Чему равно среднее арифметическое всех таких чисел? (*М. В. Карлукова*)

Решение. Представим сначала, что запятой нет, то есть найдём сумму целых чисел из указанных цифр. Есть $5!=120$ способов упорядочить цифры. При их суммировании в каждом разряде по $4!$ раз встретится каждая из пяти возможных цифр, поэтому сумма цифр в разряд единиц равна $4!\cdot(1+2+4+5+8)=24\cdot 20=480$, а в остальных разрядах в 10, 100, 1000, 10000 раз больше. Итого сумма чисел составляет $S=480\cdot 11111$.

Однако мы суммируем не целые числа, а числа с различным положением запятой. Запятая после четырёх (трёх, двух, одной) цифры не изменяет количества чисел (их 120 в каждом случае), но уменьшает их сумму в 10, 100, 1000, 10000 раз соответственно. Поэтому количество всех чисел равно $120\cdot 4=480$, а их сумма равна $S\cdot 0{,}1111=480\cdot 11111\cdot 0{,}1111$. Значит, среднее арифметическое равно $11111\cdot 0{,}1111=1234{,}4321$ (что нетрудно посчитать в столбик).

Ответ: 1234,4321.

Критерии. 2 балла — найдено количество чисел.

-1 балл за арифметическую ошибку в последнем действии, -3 балла за арифметическую ошибку в подсчёте в другом месте.

6. На координатной плоскости отметили точки $A(0,0)$ и $B(1000,0)$, а также точки $C_1(1,1)$, $C_2(2,1)$, $\ldots$, $C_{999}(999,1)$. Потом провели всевозможные прямые AC_i и BC_i $(1 \leqslant i \leqslant 999)$. Сколько целочисленных точек пересечения у всех этих прямых? (Целочисленная точка — это та, у которой обе координаты целые.) (*О. А. Пяйве*)

Решение. Обозначим через a_n и b_n прямые, проходящие через A и B соответственно, а также через точку на l с абсциссой, на n большей абсциссы A (где $1 \leqslant n \leqslant 999$). Прямые a_n и a_m при $n < m$ пересекаются в A, b_n и b_m — в B. Прямые a_n и b_m при $n > m$ пересекаются в нецелой точке (между AB и l). Наконец, прямые a_n и b_m при $n \leqslant m$ пересекаются в точке на расстоянии k от AB таком, что $1000(k-1) = k(m-n)$ (она целая в точности если k целое). Значит, k является делителем 1000, и наоборот, для каждого делителя соответствующее $m-n$ целое. Для каждого из них имеется $\frac{1000}{k} - 1$ подходящих пар (n,m), так что ответ — это $1+2+4+8+5+10+20+40+25+50+100+200+125+250+500+1000-16+2 = 2326$.

Критерии. 2 балла — за уравнение $1000(k-1) = k(m-n)$;

5 баллов — за утверждение про $\frac{1000}{k} - 1$ подходящих пар (n,m) или нечто эквивалентное ему;

-1 балл за обсчёт в последнем действии.