



Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап



Задачи для 10 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своими именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2023 года!

1. Найдите сумму всех корней уравнения:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 2024x + 1023131} + \sqrt{3x^2 - 2025x + 1023132} + \sqrt{4x^2 - 2026x + 1023133} = \\ = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{2x^2 - 2x + 2} + \sqrt{3x^2 - 3x + 3}. \end{aligned}$$

(Л. С. Корешкова)

2. Есть 8 белых кубиков одинакового размера. Марине нужно покрасить 24 грани кубиков в синий цвет, а остальные 24 грани — в красный. После этого Катя склеивает из них куб $2 \times 2 \times 2$. Если на поверхности куба столько же синих квадратов, сколько и красных, то Катя побеждает. Если нет, то побеждает Марина. Сможет ли Марина покрасить кубики так, чтобы Катя не смогла достичь цели?
(Л. С. Корешкова)
3. Любимая телеигра Пети называется «Лотерея на диване». В течение игры телезрители могут присылать СМС-сообщения с трёхзначными числами, содержащими только цифры 1, 2, 3 и 4. В конце игры ведущий называет трёхзначное число, также состоящее только из этих цифр. СМС считается выигрышной, если число в ней отличается от числа ведущего не более чем в одном разряде (например, если ведущий назвал число 423, то сообщения 443 и 123 выигрышные, а 243 и 224 — нет).
Петя хочет отправить как можно меньше сообщений таким образом, чтобы хотя бы одно точно было выигрышным. Сколько СМС ему придётся отправить?
(Л. С. Корешкова)
4. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$ с прямым углом ADB . Через точку C проведена прямая $l \parallel AD$, на которой отмечена такая точка F , что угол BAF равен острому углу между диагоналями AC и BD , причём F и C по разные стороны от AB . Точка X такова, что $FXCА$ — параллелограмм. Докажите, что точка X лежит на BD .
(О. А. Пяйве)
5. Решите в простых числах уравнение $a^b + a + b = b^a$.
(О. А. Пяйве, П. Д. Муленко)
6. На столе лежат 28 конфет. Петя считает некоторые из них вкусными. Вася за один ход может указать любой набор конфет и спросить Петю, сколько из них вкусных. Как Васе гарантированно найти все вкусные конфеты... (а) за 21 ход; (б) за 20 ходов?
(А. А. Теслер, Е. Ю. Воронецкий)